Einleitung

Der Titel der vorliegenden Arbeit lautet:

Fraktionale Diffusionsgleichungen und Foxsche H-Funktionen
mit Beispielen aus der Physik.

Die fraktionalen Diffusionsgleichungen beschreiben in besonders einfacher Weise die Phänomene der anomalen Diffusion. Sie stellen bei eindimensionaler Formulierung einen kontinuierlichen Übergang (Schneider und Wyss [SWy1989]) zwischen der Fickschen Diffusionsgleichung und der Wellengleichung dar, indem die Ordnung der zeitlichen Differentiation kontinuierlich geändert wird. Für die Auswertung physikalischer Meßdaten zur Diffusion wird im Rahmen dieser Arbeit die Bedeutung der Varianzanalyse hervorgehoben. Die bereits von A. Einstein angegebene Relation zur normalen Diffusion ist im Rahmen dieser Arbeit zu präzisieren und konsistent für die anomale Diffusion zu verallgemeinern. Hierzu gibt es Vorarbeiten (West et al. [WGMN1997]). Die Gültigkeit der Einstein-Relation auch für diffusive Prozesse mit endlicher Ausbreitungsgeschwindigkeit wird am Rande mitbehandelt (Kapitel 1).

Die Foxschen H-Funktionen und ihre Fourier-Faltungen stellen den Lösungsraum (Schneider und Wyss [SWy1989]) der hier behandelten fraktionalen Diffusionsgleichungen dar. Die Foxschen H-Funktionen (Dixon und Ferrar [DF1936]; Fox [Fox1961]) werden als Mellin-Barnes-Integrale (Mellin [Mel1910], Barnes [Bar1908]) beschrieben, die sich analytisch und numerisch (Mathai und Saxena [MS1978]) vergleichsweise gut bearbeiten lassen. Funktionentheoretische Erweiterungen werden besprochen, soweit es diese Arbeit erfordert (Kapitel 2).

Für die Analytik sowie die numerische Auswertung spielt im Rahmen dieser Arbeit das Computeralgebrasystem *Mathematica* eine herausragende Rolle, wobei zur Bewältigung der gewaltigen Rechenarbeit eigens ein Computeralgebra-Paket namens *FractionalCalculus* erstellt wurde.

Bei der Lösung zeit-fraktionaler Diffusionsgleichungen ist die Lösung von Schneider und Wyss [SWy1989] zu verifizieren und besonders für fraktale Raumdimensionen zu diskutieren. Die orts-fraktionale Diffusionsgleichung von Seshadri und West [SWe1982] ist ebenfalls zu besprechen. Außerdem wird eine Normalverteilung (Wei et al. [WBL2000]) mit anomal zeitabhängiger Varianz darauf untersucht, ob sie eine physikalisch leicht zugängliche dynamische Gleichung als Grundlage besitzt. In einem konsistent kombinierten Modell einer zeit- und orts-fraktionalen Diffusionsgleichung ist eine varianzstabile Fassung der Lösung zu finden (Kapitel 3).

Zwei Anwendungsbeispiele zum theoretischen Ansatz mit fraktionalen Diffusionsgleichungen sollen besprochen werden. Dazu stellte die Sektion Kernresonanzsprektroskopie der Universität Ulm unter Leitung von Herrn Professor Dr. R. Kimmich sowie die Forschungsgruppe Oberflächen- und Tieftemperaturphysik der Abteilung für Physik an der Universität Konstanz unter der Leitung von Herrn Professor Dr. P. Leiderer jeweils entsprechende Meßreihen freundlicherweise zur weiteren Auswertung zur Verfügung.

Der Vergleich mit Meßdaten, denen ein diffusiver Prozeß in einer fraktalen Raumdimension zugrundeliegt, ist vorzunehmen, wobei die Meßdaten (Zavada und Kimmich [ZK1998]) Anlaß zu einer Zusammenarbeit (Zavada et al. [ZSKN1999]) mit der Sektion Kernresonanzspektroskopie waren. Die im Rahmen der Dissertation [Zav1999] von T. Zavada (Link) noch unbeantworteten Fragen zum theoretischen Verständnis sind nachzuarbeiten (Kapitel 4).

Ein weiterer Vergleich mit den Meßdaten (Wei et al. [WBL2000]) zur anomalen Diffusion, die an der Universität Konstanz aufgenommen wurden, ist mit dem errechneten Propagator der geeignetsten unter den fraktionalen Diffusionsgleichungen im Vergleich mit der varianzmodifizierten Normalverteilung vorzunehmen. Der Vergleich erfordert eine Fourier-Faltung, die im entsprechenden Kontext eine varianzstabile Alternative zu den Voigt-Profilen darstellt (Kapitel 5).

Die Arbeit wurde von Herrn Professor Dr. T. F. Nonnenmacher wissenschaftlich betreut. Das Programmpaket *FractionalCalculus* wurde von Herrn Professor Dr. G. Baumann mitgestaltet, der die Bedeutung der Computeralgebra für viele Teilgebiete der Theoretischen Physik zu Recht hervorhebt.

Im weiteren Verlauf der Arbeit wird die im Rahmen der Computeralgebra übliche (und etwas gewöhnungsbedürftige) Darstellung der Ergebnisse zurückgenommen. Lediglich die Schreibweise der Funktionsnamen in der für das Computeralgebrasystem *Mathematica* (Wolfram [Wol1997]) üblichen Form erinnert daran, daß alle hier vorgestellten Ergebnisse vom Verfasser mit der Maschine und meist auch von Hand durch Herrn Professor Nonnenmacher nachvollzogen worden sind.

In den Anhängen finden sich Hintergrundinformationen und mathematische Aspekte, die das Verständnis der Arbeit abrunden oder ein explizites Nachrechnen ermöglichen.