# Mechanik.nb

*Fragesteller: 23.06.2000 Professor Dr. Gerd Baumann, Visual Analysis*
*Bearbeitung: 24.06.2000 - 02.08.2011 Norbert Südland*

## ■ 1.1. Frage

Wie läßt sich ein mechanisches Problem mit Hilfe von *Mathematica* modellieren?

## ■ 1.2. Antwort

### ■ 1.2.1. Das Prinzip vom kleinsten Zwang nach C. F. Gauß

#### ■ 1.2.1.1. In Worten

Das *Prinzip vom kleinsten Zwang* nach C. F. Gauß [1829Gauß] besagt, daß der Energieumsatz einer jeden Dynamik in Physik und Chemie stets minimal ist.

#### ■ 1.2.1.2. Herleitbarkeit

Dieses Integralprinzip ist einfach verbal zu beschreiben, aber nicht letztlich zwingend herleitbar. Es vereinigt jedenfalls das Prinzip von Le Chatelier, das Fermatsche Prinzip und das Hamilton-Jacobische Integralprinzip recht anschaulich und konsistent.

#### ■ 1.2.1.3. Beschreibbarkeit

Mathematisch läßt sich ein derartiges Integralprinzip mit Hilfe der Variationsrechnung angehen. Das Ergebnis der Variationsrechnung sind dynamische Gleichungen, die unter Berücksichtigung des Integralprinzips die gesuchte Dynamik beschreiben. Die Lösung dieser Gleichungen kann analytisch oder numerisch erfolgen.

#### ■ 1.2.1.4. Motivation zur Verwendung von Integralprinzipien

Ist die Theorie der Dynamik konsistent aufgebaut, so kann aus Kraftbilanzen (Mechanik) oder Leistungsbilanzen auf eine allgemeinere dynamische Gleichung geschlossen werden.

Die Variationsrechnung erleichtert und systematisiert dann das korrekte Aufstellen von dynamischen Bewegungsgleichungen. Eine Beschränkung auf "rein" mechanische Probleme ist dabei eher künstlich, aber möglich.

"Mechanik" im ursprünglich Newtonschen Sinne heißt "Dynamik" oder "Bewegungsbeschreibung".

## ■ 1.2.2. Mathematische Beschreibung

### ■ 1.2.2.1. Leistung(sdichte) als verallgemeinerte Energiedichte

Um die Variationsrechnung durchführen zu können, muß hier die Energiebilanz als Integral über die vier Koordinaten der Physik (drei Raumkoordinaten und eine Zeitkoordinate) interpretiert werden. Ein Integral über die Zeit ist immer zu verwenden, wenn die zeitliche Dynamik gesucht wird.

Die entsprechende *"Energiedichte"* wird folgendermaßen beschrieben:

$$\int\int\int\int \mathcal{L}[x,\ y,\ z,\ t]\, dt\, dz\, dy\, dx = E \overset{!}{=} \text{Minimum.} \tag{1.1}$$

Es handelt sich also auch bei Fehlen der räumlichen Integrale um eine Leistungsbilanz unter dem Zeitintegral.

Die Leistungsdichte ist bei der Unabhängigkeit der vier Koordianten voneinander durch partielle Differentiationen der Energie nach den vier Koordinaten gegeben:

$$\mathcal{L}[x,\ y,\ z,\ t] = \frac{d^4 E}{dx\, dy\, dz\, dt} \overset{\text{hier}}{=} \frac{\partial^4 E}{\partial x\, \partial y\, \partial z\, \partial t} \tag{1.2}$$

In der Mechanik kann aus einer Kraftbilanz durch Multiplikation mit der Geschwindigkeit $\vec{v}[x,\ y,\ z,\ t]$ eine Leistungsbilanz erzeugt werden. Dies gilt auch für Reibungskräfte. Wird die bei der Reibung entstehende Abwärme in der Leistungsbilanz berücksichtigt, so ist die Thermodynamik beteiligt. Es ist bei feldphysikalischen Fragestellungen darauf zu achten, daß nicht Terme der Art $x[x,\ y,\ z,\ t]$ usw. entstehen. Eine saubere begriffliche und formale Trennung von Koordinaten und Feldvariablen (in diesen Koordinaten) ist essentiell.

Das System ist mathematisch vollständig beschrieben, wenn $n$ Feldvariablen durch $n$ Gleichungen beschrieben werden.

Die Aussage, der Energieumsatz sei stets (eine zeitliche Angabe!) minimal, führt zu der Aussage, daß die Variation über die Leistungs(dichte)bilanz gleich der Leistungs(dichte)bilanz der Steuerkräfte des Systems ist. Existieren keine Steuerkräfte, so ist die Variation Null.

Mit diesem Ansatz lassen sich zumindest viele lineare dynamische Gleichungen verstehen. Eine eventuelle Verfeinerung dieser Aussagen ist möglich.

### ■ 1.2.2.2. Theoretischer Spezialfall der Systeme ohne Leistung

Speziell in der "Klassischen Mechanik" wird gerne mit Vernachlässigung der Reibung etc. gerechnet. Diese Dynamik wird vor allem durch das Hamilton-Jacobische Integralprinzip beschrieben, das im *Prinzip vom kleinsten Zwang* nach Gauß enthalten ist:

Um nun überhaupt eine Leistungsbilanz zu erhalten, die nicht Null wird, wird bei Hamiltonschen Potentialsystemen anstelle der zeitlichen Ableitung (1.2) der Energiebilanz ein entsprechender Differenzenquotient in der Zeit verwendet, während das Zeitintegral in (1.1) erhalten bleibt.

Außerdem ist es eine verbreitete Konvention, zur Zeit $\boldsymbol{t_1}$ die Gesamtenergie $\boldsymbol{E[t]}$ auf die potentielle Energie $\boldsymbol{E[t_1] = V}$ zu setzen, während zur Zeit $\boldsymbol{t_2}$ nur die kinetische Energie $\boldsymbol{E[t_2] = T}$ vorhanden sei.

Für die Variationsrechnung genügt darum hier das Vorhandensein von nur zwei Energiebilanzen zu zwei verschiedenen Zeiten. Ergibt die Lösung der dynamischen Gleichung, daß die potentielle Energie erst zur Zeit $\boldsymbol{t_2 \to \infty}$ Null wird, so sollte ein Rechenweg gesucht werden, der dieses Problem umgeht.

Das Ergebnis dieser Überlegungen findet sich (mit zum Teil ganz anderen Herleitungen) unter dem Stichwort *Hamilton-Jacobisches Variationsprinzip* in der Literatur (zum Beispiel [1954Bau], V, §14, Seite 42-46):

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{E[t_2] - E[t_1]}{t_2 - t_1} \, dt = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} (T - V) \, dt \stackrel{!}{=} \text{Minimum} \tag{1.3}$$

Historisch ist in den Literaturformeln (so [1954Bau], Seite 44) ein Vernachlässigen des zeitlichen Nenners in (1.3) nachweisbar, der an dem Ergebnis der Variationsrechnung nichts ändert, solange Steuerkräfte fehlen. Das Zeitintegral über die Energiebilanz trägt dabei auf Deutsch den Namen *"Wirkung"*, wobei übersehen wird, daß die Energie selbst bereits ein *"Integral der Bewegung"* ist und deshalb ebenfalls als Wirkung der Dynamik verstanden werden kann. *"Wirkung"* wird auf Englisch auch mit *"(power) effect"* wiedergegeben, was auf Deutsch wiederum *"Leistung"* heißen darf.

Wer meint, das Hamilton-Jacobische Variationsprinzip verstanden zu haben, der erweitere es auf Systeme, die etwas leisten, damit die Varianten zum Prinzip vom kleinsten Zwang diskutiert werden können.

### ■ 1.2.2.3. Ostrogradskische Gleichung

Um die Variationsableitung physikalischer Probleme korrekt durchzuführen, benötigt man folgende Formeln für $\boldsymbol{1 \leq i \leq N}$ mit $\boldsymbol{i \in \mathbb{N}}$:

$$\frac{\delta F}{\delta q_i} = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{n_3=0}^{\infty} \sum_{n_4=0}^{\infty} \left(\frac{-d}{dx}\right)^{n_1} \left(\frac{-d}{dy}\right)^{n_2} \left(\frac{-d}{dz}\right)^{n_3} \left(\frac{-d}{dt}\right)^{n_4} \frac{\partial F}{\partial q_i^{(n_1,n_2,n_3,n_4)}[x, y, z, t]} \tag{1.4}$$

Sie steht in Andeutung bei Smirnov ([1988Smi], Gleichung (36) und (37), Seite 183) und heißt *Ostrogradskische Gleichung*. Das Funktional $\boldsymbol{F}$ hängt hier von entsprechenden Feldvariablen $\boldsymbol{q_i}$ ab, wobei der Zählindex $\boldsymbol{1 \leq i \leq N}$ die Möglichkeit zuläßt, daß $\boldsymbol{N}$ verschiedene Feldvariablen vorkommen.

Die unendlichen Reihen in (1.4) brechen in aller Regel jeweils ab, entsprechende *Mathematica*-Module zur Berechnung von Funktionalableitungen wurden bereits erfolgreich von Herrn Professor Dr. Gerd Baumann im Rahmen seiner Vorlesung "*Mathematica* in der Theoretischen Physik" (WS1995-SS1996 Universität Ulm) vorgestellt.

Zum Verständnis der Ostrogradskischen Gleichung (1.4) ist eine Übungsaufgabe notwendig, die den Übergang von Funktionalen mit und ohne Gültigkeit des Schwarzschen Satzes ($\partial_{x,y} f[x, x] = \partial_{y,x} f[x, y]$) beleuchtet: Es tritt hier nie ein Polynomialkoeffizient auf.

Die Ostrogradskische Gleichung (1.4) führt in der Physik von einer erfolgreich aufgestellten Leistungsbilanz $F \to \mathcal{L}$ in $N$ Feldvariablen auf $N$ verschiedene konsistente dynamische Gleichungen.

### ■ 1.2.3. Ausblick

Mit Hilfe des *Prinzips vom kleinsten Zwang* in der nun vorgestellten erweiterungsfähigen Weise können sehr viele dynamische Systeme der Physik und Technik konsistent und leistungsorientiert beschrieben werden.

Das Aufstellen von dynamischen Gleichungen kann mit Hilfe von *Mathematica* automatisiert werden. Bei Diskrepanzen zwischen der hier vorgestellten Theorie und anderen Herleitungen von dynamischen Gleichungen ist die Lokalisierung und Beseitigung der Fehler anzustreben. Auf diese Weise ist ein kollegiales Zusammenarbeiten selbst in einem nicht immer sofort durchschaubaren Bereich der Mathematischen Physik möglich.

Das Aufstellen einer Kraft- oder Leistungsbilanz ist auch für einen Techniker ohne große mathematische Vorkenntnisse zumutbar. Die Additivität von Leistungen oder Kräften kann genutzt werden.

# Literatur

[1829Gauß]
Gauß C. F. *Über ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik*, Crelles Journal, (1829); zitiert nach [1955Wor], Seite 205

[1954Bau]
Baule B. *Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs*, Band V *Variationsrechnung*, S. Hirzel Verlag Leipzig, 4. Auflage, (1954)

[1955Wor]
Worbs E. *Carl Friedrich Gauß*, Koehler & Amelang Leipzig, 2. verbesserte Auflage, (1955)

[1988Smi]
Smirnov W. I. *Lehrgang der höheren Mathematik*, Teil IV/1, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, (1988)