U N I V E R S I T Ä T   U L M ,   S S   1 9 9 3

H A U P T S E M I N A R   Z U R   T H E O R E T I S C H E N   P H Y S I K

T H E M A :

S T O C H A S T I S C H E   D Y N A M I S C H E   S Y S T E M E

2 . S E M I N A R V O R T R A G :

E I N I G E   V E R T E I L U N G S F U N K T I O N E N , Z E N T R A L E R   G R E N Z W E R T S A T Z

B E A R B E I T U N G :

Herbst 1990 bis 10. 5. 1993	Norbert Südland, Ulm	
11. 7. 1996 bis 12. 7. 1996	Norbert Südland, Ulm	Nachträge

V O R W O R T   Z U R   2 . A U F L A G E :

Nachdem nach mehr als 3 Jahren das Interesse an Manuskripten zum Hauptsemi=narvortrag vom 10. Mai 1993 und den entsprechenden Folgeprotokollen noch nicht vollständig abgeflacht ist, soll nun endlich eine korrigierte Text=fassung versucht werden, indem ich die Anpassung an Extended ASCII Code 437 noch genauer versuche als bisher, und die mir als wesentlich erscheinenden Protokolle weiterer Rechnungen am Ende als Anhang B anfüge.
Auch diesmal ist die Möglichkeit von Rechenfehlern eingeschlossen und soll zum eigenständigen Nachrechnen sowie zum Fachgespräch anspornen.

Zu allem, was an Mißgeschicken in Forschung und Lehre bisher gelaufen ist, halte ich es für angebracht, auf drei Mahnungen aus der Bibel hinzuweisen:

> ″15. Sehet zu, daß Niemand Böses mit Bösem Jemand vergelte, sondern allezeit jaget dem Guten nach, beides unter einander und gegen Jedermann.″
> ″18. Seid dankbar in allen Dingen; denn das ist der Wille Gottes in Christo Jesu an euch.″
> ″21. Prüfet aber Alles und das Gute behaltet.″

(1.Brief des Paulus an die Thessalonicher, Kapitel 5, Verse 15, 18 und 21)

Ulm, im Juli 1996   Norbert Südland

I N H A L T :

Ü B E R B L I C K :

- Eine elegante Herleitung der Binomial-Verteilung wird vorgestellt.
- Aus der Binomial-Verteilung wird die Poisson-Verteilung als spezieller Grenzfall gewonnen.
- Die Probleme beim Übergang von der Binomial-Verteilung zur Gauß-Glocke werden aufgezeigt.
- Die Gauß-Glocke wird ohne Rechenfehler(?) in großer Vorsicht als Grenzfall der Binomial-Verteilung ″gewonnen″.
- Der Grenzfall wird als vollkommene Gleichverteilung entlarvt.
- Der ″Zentrale Grenzwertsatz″ wird ″vorgestellt″ und entkräftet.
- Die Rechenfehler von Laplace und seinen Nachfolgern werden erläutert und als tragisches Mißgeschick verstanden.
- Die Folgen dieser Ausarbeitung für die Theoretische Physik werden angesprochen.

Q U E L L E N A N G A B E N :

- Schriftliches, wo vertiefende Information zum Thema zu finden ist:

- Bronstein-Semendjajew: Taschenbuch der Mathematik; Teubner, Leipzig 1987; S.103-106 und S.665-667
- Marek Fisz: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik; Verlag der Wissenschaften, Berlin 1980; S.592-609
- H.Haken: Synergetik, eine Einführung; Springer 1990; S.39-42 Mitte sowie S.44 Mitte
- J.Honerkamp, Stochastische Dynamische Systeme; VCH Verlag, Weinheim 1990; S.16 Mitte
- Thilo Liebig: Übungen zu 'HM I' für Physiker an der Uni Ulm, WS 1990/91; Übungsblatt 9, Aufgabe 40 a.) und 45.); Blatt 10, Aufgabe 47 b. mit Lsg.

- Schriftliches, wo Rechenfehler (unwissentlich) vertuscht werden:

- H.Haken: Synergetik, eine Einführung; Springer 1990; S.42 Mitte - 44 Mitte sowie S.44 unten bis S.45
- N.G. van Kampen, Stochastic Processes in Physics and Chemistry, North Holland 1992, S.23-29; besonders auffällig auf S.27 Mitte durch undurchschaubare Substitution

- Personen, die mir bei der Erstellung dieser Ausarbeitung geholfen haben:

- Studienkollege Matuschek, der mir vor allem in der Anfangsphase mit freundlichem Rat zur Seite stand.
- Seminar-Betreuer Schoendorff, der mir beim Problem der Varianz-Berechnung den entscheidenden Tip gab. Außerdem hat er in überaus großer Mühe meine Rechnungen und Denkansätze nachvollzogen, was ich ihm sehr hoch anrechne.
- Seminar-Leiter Vollmer, der in seiner Unwissenheit die Herleitung der Gauß-Glocke für so trivial hielt, daß er darüber ein Hauptseminar veranstaltet hat.
- Mein Vater Klaus Südland, Aalen, der mir bei der Suche nach Rechenfehlern half und eine Gesamtdurchsicht dieses Manuscriptes vornahm.
- Jahve Zebaoth, der Gott Israels, der mir gemäß Jer.33,3 den wesentlichen Durchbruch bei der Lösung der Aufgabe vermittelte, die Gauß-Glocke herzuleiten, obwohl dies eigentlich nicht geht.

B E A R B E I T U N G : Norbert Südland, Ulm

D I E B I N O M I A L V E R T E I L U N G

1.) Normierung:

Irgendwann muß man ja sowieso normieren. Also tut man's gleich am Anfang:
Gegeben seien 'z' Wahrscheinlichkeiten 'w(i)', deren Index 'i' von 1 bis 'n' durchläuft.

Normierung:
$$\sum_{i=1}^{z} w(i) \overset{!}{=} 1$$

2.) Unabhängige Wiederholung:

Ein Wahrscheinlichkeitsexperiment werde 'n'-mal wiederholt. Alle Wiederholungen seien voneinander unabhängig.
Die Gesamtwahrscheinlichkeit ergibt sich als n-faches Produkt:

$$\left[\sum_{i=1}^{z} w(i) \right]^n = 1^n = 1$$

3.) Einzelwahrscheinlichkeit für Kombination = Binomialverteilung:

Für 'z = 2' ergibt sich die Binomialverteilung durch Anwendung des Binomischen Lehrsatzes:

$$\left[p + q \right]^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

Es ergeben sich also 'n+1' Summenglieder, die die Wahrscheinlichkeit dafür be= schreiben, das Ereignis Nr.1 'k'-mal und das Ereignis Nr.2 'n-k'-mal anzutref= fen:

$$B\_k(n,p) \overset{!}{=} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot [\, 1 - p \,]^{n-k}$$

Bei dieser Darstellung ist 'q' aufgrund der Normierung durch 'p' ausdrückbar.
Nach dem Binomischen Lehrsatz spielt die Reihenfolge der Ereignisse für die Bi= nomialverteilung keine Rolle.
Die Verteilung erhält man im Idealfall, wenn man '2^n' Reihenuntersuchungen mit je 'n' unabhängigen binären Stichproben (z.B. Münzwurf) durchführt. Dabei be= schreibt 'k', wie oft das Ereignis Nr. 1 (zugehörige Wahrscheinlichkeit: 'p') auftritt. 'k' kann also zwischen '0' und 'n' liegen.

ALLGEMEINER:

Nach dem polynomischen Lehrsatz (Bronstein, S.105-106) kann man analog auf eine Polynomialverteilung schließen. Statt Binomialkoeffizienten erhält man jetzt die sogenannten Polynomialkoeffizienten. Die Darstellung einer Verteilung mit 'n' Möglichkeiten erfolgt im 'n'-dimensionalen ″Anschauungs″-Raum...

4.) Erwartungswert bzw. "Mittelwert":
=======================================

Zunächst soll der Erwartungswert für 'k' bezüglich 'p' berechnet werden.
Dabei beschreibt 'k' die Anzahl derjenigen Kombinationen, bei denen 'p' 'k'-mal auftritt:

$$E(K) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} m(i) \;=\!=\; \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot w(k) \cdot N \cdot k$$

Die "Meßwerte" 'm(i)' sollen hier exakt den Erwartungwerten der Binomialvertei=
lung entsprechen:

$$m(i) = w(k(i)) \cdot N \cdot k(i)$$

Dadurch werden aus 'N = 2^n' Summengliedern nur noch 'n+1' Summenglieder, die dann alle voneinander verschieden sind. Die Wahrscheinlichkeit, 'p' 'k'-mal und 'q' 'n-k'-mal anzutreffen, ist 'p^k•q^(n-k)'. Auf diese Weise kann man ohne Schwierigkeiten die zunächst sehr unterschiedlich erscheinenden Definitionen von "Mittelwert" bzw. "Erwartungswert einer Verteilung" verstehen.
Auch die Bezeichnung "1.Moment der Verteilung" ist üblich.

$$\bar{k} = \sum_{k=0}^{n} B\_k(n,p) \cdot k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot p^{k} \cdot q^{n-k} \cdot k$$

Nun stört vor allem das 'k' am Schluß des Summanden und macht ohne Kenntnis eines Rechentricks recht viel Kopfzerbrechen -daher die Bezeichnung 'k'.
Der Trick besteht darin, eine Ableitung nach 'q' oder 'p' vor die Summe zu ziehen:

$$= p \cdot \frac{d}{d(p)} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \left[p^{k} + C \right] \cdot q^{n-k} = p \cdot \frac{d}{d(p)} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^{k} \cdot q^{n-k}$$

Die Integrationskonstante 'C' ist beliebig und stört nach dem Aufspalten in zwei Summen nur dann nicht mehr, wenn 'q' als von 'p' unabhängig variabel auf=
gefaßt wird (Dies geht nur, falls man 'p' als variabel betrachtet und gleich=
zeitig die Gesamtnormierung 'p + q' mit variiert). Diese Argumentation ist zwar mathematisch nicht so ganz schußfest, liefert aber dafür das gewünschte Ergeb=
nis. Eine bessere Argumentation habe ich bisher nicht gefunden, wohl aber meh=
rere Varianten dieser hier vorgestellten Argumentation (z.B. über eine "erzeu=
gende Funktion 't^k', die mit 'p' multipliziert wird und am Schluß wieder auf '1' gesetzt wird). Die Frage, ob man 'p' bzw. 'q' überhaupt mit differentiellen Abweichungen diskutieren darf, ist dadurch nicht gerade gut beantwortet.
Daraus folgt:

$$= p \cdot n \cdot [\, p + q \,]^{n-1} = p \cdot n$$

Analog folgt als Erwartungswert '$\overline{n-k}$' für 'n-k' bezüglich 'q':

$$\overline{n - k} = q \cdot n$$

5.) Varianz bzw. mittlere Summe der Fehlerquadrate:

Die Varianz 'σ^2' ist nach Bronstein S.666 so definiert:

$$\sigma^2 = \sum_{k=0}^{n} \left[k - p \cdot n \right]^2 \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

Bei der Auswertung von Meßreihen lautet die Definition dagegen des öfteren:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^{N} \left[m(i) - \bar{m} \right]^2$$

Gilt nicht bei einem unabhängigen Erhebungsschema.

Da hier der theoretische Mittelwert 'm' exakt als Erwartungswert der Binomial-Verteilung bezüglich 'k' und 'p' bekannt ist, muß man hier das unabhängige Er=hebungsschema ansetzen.
Nähere Information kann man mit großem Interesse bei Marek Fisz: "Wahrschein=lichkeitsrechnung und Statistik", S. 592-595, evtl. bis S.609, nachlesen.
So sauber wie bei Fisz wird die "Varianz" leider nur in wenigen Büchern abge=handelt. Die Version mit 'N-1' ist dabei längst nicht alles, was Sinn hat.

$$\overline{\Delta k^2} = \sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left[m(i) - \bar{m} \right]^2 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot w(k) \cdot N \cdot \left[k(i) - \bar{k} \right]^2$$

Hier werden die 'N = 2^n' Summenglieder wieder nach Gleichheit sortiert, wo=durch die Binomial-Koeffizienten und der Erwartungswert des Auftretens von 'k' linear in die neue Summe eingehen.
Es gilt wieder: $m(i) = w(k(i)) \cdot N \cdot k(i)$

Also folgt weiter für 'Δk^2':

$$= \sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot B\_k(n,p) - \sum_{k=0}^{n} 2 \cdot k \cdot p \cdot n \cdot B\_k(n,p) + p^2 \cdot n^2 \cdot [\, p + q \,]^n$$

$$= p \cdot \frac{d}{d(p)} \left[p \cdot \frac{d}{d(p)} \cdot [\, p + q \,]^n \right] - p^2 \cdot n^2$$

$$= p \cdot \frac{d}{d(p)} \left[p \cdot n \cdot [\, p + q \,]^{n-1} \right] - p^2 \cdot n^2$$

$$= p \cdot \left[n + (n - 1) \cdot p \right] - p^2 \cdot n^2$$

$$= p \cdot n + p \cdot n^2 - p^2 \cdot n - p^2 \cdot n^2 = p \cdot n \cdot (1 - p)$$

$$= n \cdot p \cdot q$$

DIE POISSON-VERTEILUNG

1.) Übergang aus der Binomialverteilung:

Falls bei einem Zufallsexperiment z.B. auf 'N' Feldern 'n = μ•N' Teilchen ver=
teilt sind ('μ' ist dann die mittlere Teilchendichte), so lassen sich die Bi=
nomialkoeffizienten einfacher darstellen:

$n = \mu \cdot N$	Anzahl Teilchen = Zahl der unabhängigen Versuche
$p = 1 / N$	Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen auf einem
$ = \mu / n$	bestimmten Feld anzutreffen
$q = 1 - p$	Gegenwahrscheinlichkeit

Hier ist die Teilchendichte 'μ' konstant und soll als Erwartungswert von 'k' herauskommen.
Daraus folgt:

$$B\_k(n,\mu/n) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \cdot \left[\frac{\mu}{n} \right]^k \cdot \left[1 - \frac{\mu}{n} \right]^{n-k}$$

$$= \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-k+1)}{k! \cdot n\text{^}k} \cdot \mu^k \cdot \left[1 - \frac{\mu}{n} \right]^n \cdot \left[1 - \frac{\mu}{n} \right]^{(-k)}$$

$$= \frac{\mu\text{^}k}{k!} \cdot \left[1 - \frac{\mu}{n} \right]^n \cdot \left[1 - \frac{1}{n} \right] \cdot \left[1 - \frac{2}{n} \right] \cdots \left[1 - \frac{k-1}{n} \right] \cdot \left[1 - \frac{\mu}{n} \right]^{(-k)}$$

Der Grenzwert für 'n -> ∞', bei dem 'p' proportional zu '1/n' gegen NULL geht, ergibt:

$$\pi(k,\mu) = \lim_{n\to\infty} B\_k(n,\mu/n) = \frac{1}{k!} \cdot \mu^k \cdot e^{-\mu}$$

Dabei wurde die Gegenwahrscheinlichkeit '1-μ/n' auf '1' genähert. Die Formel findet also nur für kleine 'p' eine sinnvolle Anwendung.

2.) Gesamtwahrscheinlichkeit für unendlich viele Wiederholungen:

Soeben ist der Grenzwert einer unendlich großen Verteilung berechnet worden.
Die Gesamtwahrscheinlichkeit nimmt dadurch den Wert '1^∞' an.
Allgemein ergeben sich Probleme, falls man '1^∞' für 'n -> ∞' berechnen soll.
Dies liegt daran, daß im allgemeinen Fall die '1' selbst bereits ein Grenzwert für 'n -> ∞' sein kann.
Hier in der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist das aber nicht der Fall. Darum rechnet man formal mathematisch die Gesamtwahrscheinlichkeit für unendlich viele Wiederholungen so, daß man setzt:

$$\lim_{n\to\infty} 1^n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

Die Normierung bleibt also auch im mathematischen Grenzfall (meßtechnisch nicht prüfbar!) erhalten. Ausnahmen (siehe später) bestätigen diese Regel.

3.) Mittelwert und Varianz der Poissonverteilung:
===
Hier ist es nur sinnvoll, nach dem Erwartungswert für das Ereignis zu fragen, das mit der verschwindenden Wahrscheinlichkeit 'p' auftritt:

$$< k > = \bar{k} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\mu^k}{k!} \cdot e^{-\mu} = \mu \qquad (n \cdot p \text{ für } n \to \infty)$$

Analog folgt:

$$< k^2 > = \overline{k^2} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\mu^k}{k!} \cdot e^{-\mu} = \mu^2 + \mu$$

Die Varianz berechnet man so:

$$\sigma^2 = < (\Delta k)^2 > = < (k-\bar{k})^2 > = < k^2 > - < 2 \cdot k \cdot \bar{k} > + < \bar{k} >^2 = < k^2 > - (\bar{k})^2$$

Diese Rechnung ist in der angegebenen Weise möglich, weil man den Faktor '$\bar{k}$' als Konstante betrachten kann und deshalb aus der Mittelungssumme ziehen darf.

Also: $\sigma^2 = \mu$ **($n \cdot p \cdot q$ für '$n \to \infty$' und '$q \to 1$')**

4.) Anwendung der Poissonverteilung:
======================================
Die Gesamtwahrscheinlichkeit der Poissonverteilung beträgt aufgrund der Taylor-Reihe für die Exponentialfunktion '1'. Als Anwendung der Poissonverteilung ist die numerische Berechnung der Exponentialfunktion interessant, da die numeri= sche Auswertung beim Erwartungswert '$p \cdot n = \mu$' beginnen kann.

Weitere Anwendungen finden sich, wenn 'p' proportional zu '1/n' gegen '0' geht und 'n' sehr groß wird. In solchen Fällen ist zwar auch eine Berechnung der Binomial-Verteilung möglich, aber meist nicht so einfach wie die Poisson-Verteilung.

Interessant ist hierbei, daß bei dieser Abschätzung die Wahrscheinlichkeit, das Ereignis 'p' 'k'-mal anzutreffen, bei konstanter Teilchendichte endlich bleibt, obwohl 'n' unendlich groß wird und 'p' dadurch gegen '0' geht.

Es war mir bisher nicht möglich, die Poisson-Verteilung als Verteilung eines ″Zufallsexperiments″ zu verstehen, da ich (noch?) nicht weiß, wo ich den Term 'N = 2^n', der bei der Binomial-Verteilung auftaucht, bei dem hier betrachteten Beispiel einbauen soll.
Die Schwierigkeit einer physikalischen Herleitung liegt für mich oft darin, zu der Rechnung eine passende Interpretation zu finden. Die mathematische Seite einer physikalischen Betrachtung ist dagegen eher so eine Art ″Handwerk″.

D I E   N O R M A L - V E R T E I L U N G
(G A U S S - G L O C K E)

1.) Motivation:

Für sehr große Zahlen ist die Suche nach einer allgemeinen Verteilungsfunktion interessant, die das Verhalten der Binomialkoeffizienten für sehr große Zahlen sinnvoll wiedergibt. Hier hilft der Weg über die Poisson-Verteilung nicht wei= ter, sondern man muß leider schon die Binomial-Verteilung ungenähert durchrech= nen, um auf diese Weise das allgemeine Verhalten der Verteilung für große 'n' nachvollziehen zu können.

2.) Das Verhalten der Binomialverteilung für große Zahlen:

Man wählt für die beiden Einzel-Wahrscheinlichkeiten die Bezeichnung 'p' und 'q', damit der Vergleich mit vielen Lehrbüchern einfacher fällt.

Zur Berechnung der Binomial-Koeffizienten benötigt man die Stirlingsche Formel, um die Fakultäten abschätzen zu können:

$$n! \approx \left[\frac{n}{e} \right]^n \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot n} \cdot e^{w(n)}$$

Dabei gilt:

$$\frac{1}{12 \cdot (n + \frac{1}{2})} < w(n) < \frac{1}{12 \cdot n}$$

Für genügend große 'n' kann 'w(n)' als '0' angenommen werden.

Der Erwartungswert von 'k' für 'B_k(n,p)' ist sicher bei 'p•n' zu finden. Zur Darstellung hält man nun diesen fest und untersucht, welchen Grenzwert die Bi= nomial-Verteilung 'B_k(n,p)' für unendlich große 'n' und 'k = p•n' besitzt:

$$\begin{bmatrix} n \\ p \cdot n \end{bmatrix} \cdot p^{p \cdot n} \cdot q^{q \cdot n} \approx \frac{n^n \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot n} \cdot e^{p \cdot n} \cdot e^{q \cdot n} \cdot p^{p \cdot n} \cdot q^{q \cdot n}}{e^n \cdot p^{p \cdot n} \cdot n^{p \cdot n} \cdot q^{q \cdot n} \cdot n^{q \cdot n} \cdot 2 \cdot \pi \cdot n \cdot \sqrt{p \cdot q}} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma^2}}$$

Diese Binomialverteilung B_k(n,p) kann man sich anschaulich als die getaktete Diffusion unendlich vieler Teilchen vorstellen, die anfangs alle an einer Stel= le 'p•n' saßen. Daß nach unendlich langer Zeit ('n -> ∞') eine Gleichverteilung vorhanden ist (Hier: überall ist die Wahrscheinlichkeit, noch etwas anzutref= fen, NULL), verwundert nicht. Die Gesamtwahrscheinlichkeit ist und bleibt allerdings wieder '1':

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} B_k(n,\tfrac{1}{2}) = \frac{2^\infty}{2^\infty} = 1 \qquad \left[\overset{\text{hier!}}{=\!=} \infty \cdot 0 \right]$$

3.) Veranschaulichung der getakteten Diffusion:
===
Es sei noch darauf hingewiesen, daß bei der hier durchgeführten Betrachtung der getakteten Diffusion eine STETIGE Verteilungs-Funktion betrachtet werden kann, die durch permanentes Teilen eines Würfels mit Fläche '1' entstehen kann:

In dem hier angedeuteten Beispiel gilt: $p = q = ½$

```
                                ┌───────┐
                                │       │              ┌ 0 ┐      0    0
                                │   1   │              │   │ • p  • q
                                │       │              └ 0 ┘
                                └───────┘
                k =                 0

Umskalierung:                       0

                            ┌───────┬───────┐          ┌ 1 ┐      k    1-k
                            │   ½   │   ½   │          │   │ • p  • q
                            └───────┴───────┘          └ k ┘
                k =             0       1

Umskalierung:                 -½    0   ½

                                ┌───────┐              ┌ 2 ┐      k    2-k
                        ┌───────┼───────┼───────┐      │   │ • p  • q
                        └───────┴───────┴───────┘      └ k ┘
                k =         0       1       2

Umskalierung:             -1  -½    0   ½   1
```

Es ist sicher möglich, sich anhand dieses Beispiels klar zu machen, daß die Ge= samtfläche bei jeder Verfeinerung der Teilungen konstant auf '1' bleibt, wäh= rend die Binomial-Verteilung selbst die totale Gleichverteilung mit lauter Wer= ten anstrebt, die NULL sind.

Nach dieser Betrachtung wundert man sich schon, daß in den Lehrbüchern die Gauß-Glocke anstelle der Gleichverteilung als Grenzfall der Binomial-Verteilung herauskommen soll.

Gleichzeitig stört es sehr, daß die so betrachtete Verteilungs-Folge, die man im Prinzip über Dreiecks-Zerstückelung in eine stetige Funktion überführen kann, ständig ihre Form ändert.
Man sucht nun also eine Hilfs-Skalierung, mit deren Hilfe die Fläche unter der oberen Grenzkurve konstant bleibt und gleichzeitig die Form der Binomial-Ver= teilung sinnvoll erhalten bleibt.

4.) Skalierung für sinnvolles Mitverfolgen der Verfeinerung von 'B_k(n,p)':

Nun ist auch sofort klar, wie man die Binomialverteilung skalieren kann:

- Statt 'B_k(n,p)' trägt man etwas, das proprotional zu '$\sigma \cdot B_k(n,p)$' ist, als Ordinate auf. Als Proportionalitäts=faktor wählt man aus Vorsicht den Faktor 'v'. Es kann ja schließlich sein, daß die Gesamt-Normierung durch den Grenz=übergang nicht für jedes beliebige 'v' erhalten bleibt.

  Es gilt: $$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$$

- Um den Erwartungswert mitverfolgen zu können, muß man die Auftragung vom Erwartungswert nach Möglichkeit auf die Ab=szisse 'x = 0' setzen. Dies geschieht dadurch, daß man setzt:
  $$x = k - \bar{k} = k - p \cdot n$$

  Für 'k = p • n' ergibt sich dadurch der Wert 'x = 0'.
  Man kann auch bei den Klötzchen-Bildern im letzten Abschnitt nachprüfen, daß auf diese Weise etwas Sinnvolles herauskommt.

- Die Normierung soll gleichzeitig als konstante Fläche der Darstellung erhalten bleiben, so daß man 'x' noch durch '$v \cdot \sigma(n)$' teilen muß:
  $$x = \frac{k - \bar{k}}{v \cdot \sigma} = \frac{k - p \cdot n}{v \cdot \sqrt{p \cdot q \cdot n}}$$

  'x' läuft in etwa von $-v \cdot \sqrt{n \cdot p/q}$ bis $+v \cdot \sqrt{n \cdot q/p}$ durch. Das gilt vor allem für große 'n'.

- Da 'k' in Sprüngen von ganzen Zahlen erfolgt, macht auch 'x' kleine Sprünge. Der Abstand 'Δx' zwischen zwei Sprüngen be=trägt:
  $$\Delta x = \frac{k + 1 - p \cdot n - (k - p \cdot n)}{v \cdot \sigma} = \frac{1}{v \cdot \sigma} = \frac{1}{v \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot q}}$$

- Für '$n \to \infty$' geht 'Δx' gegen NULL, und der Definitionsbereich von 'x' geht schließlich von '$-\infty$' bis '$+\infty$'. Man erhält also eine stetige Funktion 'f(x)', die für alle reellen 'x' erklärt ist.

- Um an der Stelle 'x' die Binomial-Verteilung ausrechnen zu können, muß man also
  $$k = [\, v \cdot \sigma \cdot x + p \cdot n + \tfrac{1}{2} \,]$$
  als Argument der Binomialverteilung übergeben. Die Gauß-Klammer-Funktion sorgt dafür, daß 'k' richtig auf ganze Zahlen gerundet wird. Für besonders große 'n' ist die Gauß-Klammer-Rundung ver=nachlässigbar, und es bleibt stehen:
  $$k \approx v \cdot \sigma \cdot x + p \cdot n$$
  Alternativ kann man auch 'k' als Kontinuum diskutieren und erhält so eine stetige Interpolationskurve für 'B_k(n,p)' und '$n < \infty$' auf einem endlichen (!) Intervall.

5.) Die Gaußglocke als Grenzfall der Binomial-Verteilung:

Im Grenzfall 'n->∞' erhält man eine stetige Funktion 'f(x)' im Intervall '(-∞,∞)':

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} B\_k(n,p)\cdot v\cdot\sqrt{n\cdot p\cdot q} = \lim_{n\to\infty} \begin{bmatrix} n \\ p\cdot n + v\cdot\sigma\cdot x \end{bmatrix}\cdot p^{p\cdot n+v\cdot\sigma\cdot x}\cdot q^{q\cdot n-v\cdot\sigma\cdot x}\cdot\sigma\cdot v$$

Das sieht doch sehr hübsch aus. Mit der Stirlingschen Formel (alle beteiligten Fakultäten wachsen für 'n->∞' zu sehr großen Werten!) sollte nun eigentlich die heiß ersehnte Gaußglocke herauskommen:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\cdot p^{p\cdot n + v\cdot\sigma\cdot x}\cdot q^{q\cdot n - v\cdot\sigma\cdot x}\cdot\sqrt{p\cdot q\cdot n}\cdot v}{(\,p\cdot n + \sigma\cdot v\cdot x\,)!\cdot(\,q\cdot n - \sigma\cdot v\cdot x\,)!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{n}\cdot\sqrt{2\cdot\pi\cdot n}\cdot p^{p\cdot n}\cdot p^{\sigma\cdot v\cdot x}\cdot q^{q\cdot n}\cdot q^{-\sigma\cdot v\cdot x}\cdot\sqrt{p\cdot q\cdot n}\cdot v}{e^{n}\cdot\left[p\cdot n + \sigma\cdot v\cdot x\right]^{p\cdot n}\cdot\left[p\cdot n + \sigma\cdot v\cdot x\right]^{v\cdot\sigma\cdot x}\cdot\sqrt{2\cdot\pi\cdot(p\cdot n + \sigma\cdot v\cdot x)}}\cdot$$

$$\cdot\lim_{n\to\infty} \frac{e^{p\cdot n}\cdot e^{\sigma\cdot v\cdot x}\cdot e^{q\cdot n}\cdot e^{-\sigma\cdot v\cdot x}}{\left[q\cdot n - \sigma\cdot v\cdot x\right]^{q\cdot n}\cdot\left[q\cdot n - \sigma\cdot v\cdot x\right]^{-\sigma\cdot v\cdot x}\cdot\sqrt{2\cdot\pi\cdot(q\cdot n - \sigma\cdot v\cdot x)}}$$

In den Klammern kann man jeweils 'n' intern ausklammern und dann noch etwas durchkürzen. Der Term 'σ•v•x/n -> 0' geht zwar für 'n->∞' nach '0', kann jedoch nicht einfach weggelassen werden, solange der Exponent der Klammer nach ∞ geht. In diesem Fall muß man also '1^∞' ordentlich als Grenzwert berechnen. Lediglich die Wurzeln (konstanter Exponent '½') lassen sich auf diese Weise kürzen. Der Beweis, daß man beliebige Grenzwerte in beliebige Funktionen, die auf einem be= liebigen Intervall stetig sind, hineinziehen kann, wird für Interessierte im Anhang geliefert.

Es bleibt also stehen:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{v}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot\left[\frac{p}{p + \frac{\sigma\cdot v\cdot x}{n}}\right]^{p\cdot n}\cdot\left[\frac{q}{q - \frac{\sigma\cdot v\cdot x}{n}}\right]^{q\cdot n}\cdot\left[\frac{p\cdot q\cdot n - \sigma\cdot p\cdot v\cdot x}{p\cdot q\cdot n + \sigma\cdot q\cdot v\cdot x}\right]^{\sigma\cdot x}$$

Die ersten beiden Klammer-Ausdrücke können analog behandelt werden und ergeben:

$$\left[\frac{a}{a \pm \dfrac{\sigma \cdot v \cdot x}{n}}\right]^{n \cdot a} = \left[1 \pm \frac{\sigma \cdot v \cdot x}{n \cdot a}\right]^{-n \cdot a} \to e^{-(\pm\sigma \cdot v \cdot x)}$$

Die beiden ersten Klammern kann man also schließlich und endlich doch noch zu '1' zusammenkürzen, obwohl hier bereits '$\sigma = \infty$' gilt:

$$e^{-\sigma \cdot v \cdot x + \sigma \cdot v \cdot x} = e^{0} = 1$$

Auf die '1' wäre man möglicherweise auch durch Symmetrie-Überlegungen gekommen. Die letzte Klammer kann man zunächst mit 'σ' durchkürzen und dann den Grenzwert '$\sigma \to \infty$' statt '$n \to \infty$' betrachten:

$$f(x) = \lim_{\sigma \to \infty} \frac{v}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \left[\frac{\sigma - v \cdot x \cdot p}{\sigma + v \cdot x \cdot q}\right]^{\sigma \cdot v \cdot x}$$

$$= \lim_{\sigma \to \infty} \frac{v}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \left[\frac{\sigma + v \cdot q \cdot x - v \cdot q \cdot x - v \cdot p \cdot x}{\sigma + v \cdot q \cdot x}\right]^{\sigma \cdot v \cdot x}$$

$$= \lim_{\sigma \to \infty} \frac{v}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \left[1 - \frac{x \cdot v}{\sigma + q \cdot x \cdot v}\right]^{\sigma \cdot v \cdot x}$$

$$= \lim_{\sigma \to \infty} \frac{v}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \left[1 - \frac{x^2 \cdot v^2}{\sigma \cdot x \cdot v \cdot \left[1 + \dfrac{v \cdot x \cdot q}{\sigma}\right]}\right]^{\sigma \cdot x \cdot v} = \frac{v \cdot e^{-x^2 \cdot v^2}}{\sqrt{2 \cdot \pi}}$$

Nun steht in den Lehrbüchern die Formel:

$$\frac{e^{-\frac{1}{2} \cdot x^2}}{\sqrt{2 \cdot \pi}}$$

Es wird nun noch eine Aufgabe sein, über die Normierungsbedingung den Wert von 'v' so zu bestimmen, daß die Gesamtfläche unter der resultierenden Kurve '1' wird.

6.) Der Übergang von der Summe zum Integral:

Um den Grenzwert der Binomialverteilung bei unendlicher Verfeinerung zu ermög= lichen, wurde ja '$v \cdot \sigma \cdot B_k(n,p)$' betrachtet. Jetzt kennt man das Ergebnis und kann mitverfolgen, wie eine Summe über eine diskrete Verteilung in ein Integral über eine Dichteverteilung überführt wird:

Bisher kann man schreiben:

$$B_k(n,p) \overset{?}{\approx} \frac{v \cdot e^{-v^2 \cdot x^2}}{\sqrt{(2 \cdot \pi)} \cdot v \cdot \sigma} = \frac{e^{-v^2 \cdot x^2}}{\sigma \cdot \sqrt{(2 \cdot \pi)}}$$

Solange 'n' endlich bleibt, bleibt auch 'σ' endlich. In diesem Zusammenhang muß man irgendwie vergessen, daß die Exponential-Funktion nur für '$n \to \infty$' und damit auch '$\sigma \to \infty$' herauskommt, damit man sich nicht allzu sehr wundert.

Der Wert '$\Delta x = 1/(\sigma \cdot x)$' strebt für '$\sigma \to \infty$' gegen '$dx$'. Wenn man nun die Summe über die Binomial-Verteilungen in ein Integral über 'dx' umschreibt, so bleibt die Normierung NICHT erhalten. Das hat man bei Grenzwerten nie so richtig im Griff. Das ist also die angekündigte Ausnahme zu der Regel vom Erhalt der Nor= mierung im Grenzübergang '$n \to \infty$' (Oder hab' ich mich verrechnet ?).

Eine Alternative, wie man vielleicht mit dem Problem klar kommt, besteht darin, daß man postuliert:

$$\Delta x \to dx \, / \, v$$

In einem solchen Fall ist für '$v = \sqrt{½}$' alles in Ordnung. Es wäre nun leider aber nicht mehr möglich, die Form der Gauß-Glocke beliebig zu modifizieren, da der 'v'-Faktor ja dann nicht mehr beliebig ist. Also ist auch das eitel und Ha= schen nach Wind (Ansatzfehler können selten durch Postulate gerettet werden).

Außerdem könnte man sich noch überlegen, ob 'Δx' nicht gegen das Differential einer noch unbekannten Funktion '$g(n(x))$' strebt, wodurch man über ein Riemann-Stieltjes-Integral wieder Land sehen könnte, falls die Funktion '$g(n(x))$' be= kannt wäre. Leider kenne ich diese Funktion nicht und kann sie auch nicht her= leiten.
Das Problem der Normierung löst sich erst nach einer Rücksubstitution für 'x':

$$B_k(n,p) \approx \frac{v \cdot e^{-v^2 \cdot x^2}}{\sqrt{(2 \cdot \pi)} \cdot v \cdot \sigma} = \frac{e^{-\left[\frac{k - n \cdot p}{\sigma}\right]^2}}{\sigma \cdot \sqrt{(2 \cdot \pi)}}$$

Im Grenzfall '$\sigma \to \infty$' ergibt der Exponent für '$k \neq n \cdot p$' den Wert '$-\infty^2$', während der Term '$1/\sigma$' das Ergebnis nochmals durch '∞' teilt und damit sicher zu NULL macht (Man könnte zur Verdeutlichung auch "$0/\infty$" schreiben).
Es ist nun mathematisch unmöglich (Das Integral über die Gaußglocke ist nicht allgemein lösbar!), die Normierung für endliche Grenzen zu überprüfen.

Man könnte zwar 'k' als Kontinuum wählen und auf diese Weise über 'dk' die Flä= che für unendliche Grenzen als richtig normiert hinbiegen. Das Problem liegt jedoch darin, daß unendliche Grenzen stets mit '$\sigma=\infty$' identisch sind. Ist 'σ' endlich, bleiben auch die Integrationsgrenzen der "Kontinuums-Diffusion" end= lich.
Bei unendlichen Integrationsgrenzen fehlt der Faktor '$\sqrt{2}$' bzw. die Findung eines möglichen Rechenfehlers (Ich habe ihn 2 Wochen lang gesucht und nicht gefunden), um die Normierung zu befriedigen.
Insgesamt scheint es zur Beschreibung einer Binomial-Verteilung sehr seltsam zu sein, von '$-\infty$' bis '$+\infty$' zu integrieren.

7.) Das Ergebnis heißt GLEICHVERTEILUNG statt GAUSS-GLOCKE:
==

Bei Grenzwerten sollte man insgesamt konsequent bleiben: Die Gauß-Glocke kommt für unendlich große 'n' und damit für unendlich große 'σ' heraus. Gleichzeitig ergibt aber ein unendlich großes 'n' eine derart perfekte Gleichverteilung, daß außer für den Wert 'k = p•n' keine noch so große endliche Potenz von 'n', die man mit der Gaußglocke multipliziert, die Gleichverteilung ändern kann.
Die Berechnung der Momente der Wahrscheinlichkeits-Verteilung ergibt also stets ein Integral über eine nicht normierte ″δ″-Funktion (Integriert wird über 'dk' und nicht über 'dx') und das Ergebnis bleibt '0'. Man erhält die Momente also nicht durch Integration über die Gauß-Glocke, sondern durch Bildung des Grenz= werts 'n->∞' für ein bekanntes Moment der Binomial-Verteilung.
Die Berechnung des 1.Moments wird vollkommen sinnlos. Bei der Berechnung des 2.Moments erhält man zwar '0', dies ist jedoch ohne Aussage, solange der Mit= telwert bzw. Erwartungswert (1.Moment!) die Aussage ″überall″ liefert.
All diese Eigenschaften sind Eigenschaften der vollkommenen Gleichverteilung.

Man kann sich also generell merken:

```
////////////////////////////////////--\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\
||                                                                          ||
||    Jede Verteilung, die auf unabhängigen Wahrscheinlichkeiten basiert,   ||
||    strebt für große Wiederholungszahlen die Gleichverteilung an.         ||
||                                                                          ||
\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\--////////////////////////////////////
```

Dieses Ergebnis weicht erheblich von dem ab, was die Lehrbücher berichten. Es ist bisher noch in keinem Lehrbuch der Statistik, wohl aber in Lehrbüchern der Gaskinetik unter dem Stichwort ″Entropie″ zu finden.

Ein weiteres Ergebnis sollte zu denken geben:
Für kleine 'n' liegt es nahe, einen Faktor '½' im Exponenten der Glocke dazu= zuerfinden, damit die Normierbarkeit des Integrals gewährleistet bleibt. Für sehr große 'n' könnte dagegen beim Differential der Faktor '√2' fehlen.

Es scheint also recht aussichtslos zu sein, eine allgemeine Formel zur Abschät= zung von Binomial-Verteilungen oder Binomial-Koeffizienten zu finden. Die Gauß- Glocke ist jedenfalls nicht sehr geeignet.
Es gibt hierzu sicherlich noch viele mögliche Forschungs-Ansätze, eine Interpo= lationsformel für unabhängige Wahrscheinlichkeits-Verteilungen zu formulieren.

So nach dem ersten Anschein sehen z.B. folgende Funktionen recht gut aus:

$$\cos(x) \qquad\qquad \underbrace{\frac{\sin^2(x)}{x^2}}$$

ergibt eine sehr schöne Glocke innerhalb der 1.Periode

Diese Funktionen berücksichtigen, daß die Verteilung für endliche 'n' auch nur eine endliche Ausdehnung hat. Zur Beschreibung von Diffusion sind sie sicher besser geeignet als die Gauß-Glocke, die vor allem den Grenzfall der Gleich= verteilung sehr überzeugend präsentiert.
Auch Lorentz-Kurven oder beliebige Kombinationen von irgendwelchen ″Hut-Funk= tionen″ mit Funktionen, die auf einem endlichen Intervall stetig und differen= zierbar beschränkt werden können, könnten als geeignete Interpolation erschei= nen.

Der Gedanke an eine standardisierte Normalverteilung, die ALLE möglichen Bino= mial-Verteilungen global zusammenfaßt, ist dadurch wieder in die Ferne gerückt.

8.) Warum hat man so lange an einen Rechenfehler geglaubt ?

Diese Frage kann ich nicht beantworten. Ich will lediglich die Rechenfehler in der ″offiziellen″ Herleitung der Gaußglocke lokalisieren, die da lautet:

> Ausgehend von der Poisson-Verteilung wählt man die logarithmische Darstellung der Faktoren und erhält Summanden. Anschließend wird der Logarithmus in Summanden entwickelt und abgeschätzt bis zur Fehlerordnung ″n^-½″. Das Ergebnis wird anschließend wieder zum Argument der Exponential-Funktion.

Eine Alternativ-Lösung geht von der Binomial-Verteilung aus und schätzt wiede= rum in der logarithmischen Darstellung die Summanden bis zur Fehlerordnung ″n^-½″ ab.

Diese Rechnungen sind alle sehr plausibel. Am Schluß steht die Formel da:

$$B\_k(n,p) \approx \frac{e^{-\left[\frac{k - n\cdot p}{\sqrt{2}\cdot\sigma}\right]^2}}{\sigma\cdot\sqrt{(2\cdot\pi)}}$$

Die Tatsache, daß man diese Formel nur für 'σ->∞' erhält, wird nicht erwähnt. Dafür erfährt man nach genauerem Hinsehen, daß es auch Varianten in der Herlei= tung gibt, die von einer ″Abschätzung für große »n«″ reden.

Trotzdem wird das viel interessantere Ergebnis des Grenzwerts verschwiegen. Wie ich in einer Vorbesprechung erfuhr, entstammt die Herleitung der Gauß-Glocke der ″Genialität″ des Laplace und darf daher zunächst nicht von Studenten der Universität Ulm hinterfragt werden. Schließlich bekam ich jedoch die Genehmi= gung, die hier vorgefundenen Probleme darstellen zu dürfen. (Es gibt immer noch freundliche Leute in Ulm).

> Und ich armer Depp hatte schon geglaubt, einen Rechenfehler gefunden zu haben, weil ich den Grenzwert halt zu Ende gedacht hatte...????

Das Problem der Nicht-Normierbarkeit, das ich bei der exakteren Grenzwertbil= dung hatte, fällt bei der ″genialen″ (Zitat) Herleitung des Laplace nicht auf. Ich hätte dieses Problem der Nicht-Normierbarkeit dagegen als Indiz gewertet, daß die Gaußglocke das Verhalten der Binomial-Verteilung nur sehr mäßig be= schreibt. Auch die Diskrepanz zwischen Theorie und Rechen-Experiment, wie ich sie im Sommer 1992 schon einmal vorfand, hätte ich darauf zurückgeführt.

Ich halte außerdem auch die Diskussion der möglichen Aproximationen an die Bi= nomial-Verteilung für interessant, selbst wenn irgendwann einmal jemand einen Rechenfehler in meiner Grenzwert-Berechnung festgestellt haben sollte.

Von Eindeutigkeit oder gar Trivialität bezüglich dieser Thematik kann ich nicht reden. Dagegen scheint die Quadratur des Kreises ein Vierzeiler zu sein (Ein Physiker ist ja nicht so dumm, daß er sich auf Zirkel und Lineal beschränkt).

D E R Z E N T R A L E G R E N Z W E R T S A T Z :

Wie er nicht in den Lehrbüchern zu finden ist:

Als Grenzwert der zurechtgebogenen Binomial-Verteilung werde nun also die nor=
mierbare Gauß-Glocke der Form

$$f(x) = \frac{e^{-\left[\frac{\frac{1}{2}\cdot x^2}{\sigma^2}\right]}}{\sqrt{(2\cdot\pi)}\cdot\sigma}$$

definiert. Damit sind alle Probleme der Herleitung ″erledigt″. Die ″Standard-Normalverteilung″ hat außerdem den Wert '$\sigma = 1$' zu haben.

Mit etwas Bronstein oder durch elementare Rechnung kann man nun die Momente der Verteilung wie folgt berechnen:

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot x^2}}{\sqrt{(2\cdot\pi)}} \cdot dx \;\overset{\text{ungerade}}{\underset{\text{Funktion!}}{=\!=\!=}}\; 0$$

$$\overline{x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot x^2}}{\sqrt{(2\cdot\pi)}} \cdot dx = \sigma^2 - \bar{x}^2 = 1$$

Nun habe man mehrere dieser Standard-Normalverteilungen mit Mittelwert '0' und Varianz '1' vorliegen. Wie man dazu kommt, ist mir herzlich egal, solange die Frage nicht geklärt ist, welchen physikalischen Sinn man der Skalierungs-Ver=
zerrung zur Herleitung der Gauß-Glocke beimessen soll. Die Rücksubstutition führte bei mir stets zu einer Gleichverteilung, die genauso wie die δ-Funktion als Grenzfall beliebig vieler Funktionen diskutiert werden kann.

Der Mittelwert dieser so definierten Verteilungen ist sicher auch wieder eine Gauß-Glocke mit Mittelwert '0' und Varianz '1'. Anschaulich macht man sich das an besten grafisch klar:

> Die Addition dieser Kurven ergibt eine Gauß-Glocke, die um den Faktor 'N' überhöht ist. Für das arithmetische Mittel teilt man wieder durch den Faktor 'N' und kann über das Ergebnis nachdenken.

Im übrigen kann man diesen Satz auch für den Mittelwert von Gleichverteilungen abwandeln.

P.S.: Ich finde die neuen 10 DM - Scheine immer noch sehr hübsch.

N A C H R U F :

Als Ergebnis dieser Auseinandersetzung sei festgehalten, daß es in der Theoretischen Physik immer wieder das Phänomen gibt, daß von der sogenannten ″wissenschaftlichen Linie″ abweichende Überlegungen zunächst nicht an der Universität Ulm diskutiert werden dürfen (Über andere Universitäten erlaube ich mir keine Aussage). Das Erfreuliche an der Sache ist, daß man als Student schließlich schon noch das Darstellen von ungewöhnlichen Ansätzen genehmigt bekommt. Die Geduld und Ausdauer des Seminar-Betreuers Schoendorff bedarf in diesem Zusammenhang einer ausdrücklichen Anerkennung.

Nach der hiermit vorgestellten Ausarbeitung ist nun der Absolutheits-Anspruch der Gauß-Glocke zu Grabe zu tragen. Falls jemand hier anderer Meinung ist, muß eben die Meinungs- und Forschungs-Freiheit an der Uni als ″de facto nicht vorhanden″ gewertet werden.
Es ist schon aus methodischen und didaktischen Gründen höchst uneinsichtig, warum man immer nur ″richtige″ Ergebnisse und Aussagen präsentieren soll.

Über Richtigkeit eines physikalischen Ansatzes kann man sicher auch lange Jahre unterschiedlicher Meinung sein, ohne daß dies die physikalische Forschung in Mitleidenschaft zieht.

Als Student behalte ich mir das Recht auf Irrtum und auch auf fachlich qualifizierte Auskunft über Denk-, Ansatz- und Rechenfehler vor. Im Gegenzug verlange ich für meine Arbeit ja schließlich kein Geld.

Falls sich meine schlimmen Befürchtungen nicht entkräften lassen, kann mit der umfassenden Revision folgender physikalischer Fachbereiche und Theorien gerechnet werden:

- **Der Gauß-Glocken-Ansatz von Schrödinger und Born bedarf einer anderen Begründung als durch unabhängige Wahrscheinlichkeit.**
- **Die Thermodynamik sollte wieder mehr phänomenologisch als statistisch interpretiert werden. Dadurch könnte man unter Umständen Naturgesetze finden, die bislang für einen Effekt der Statistik gehalten wurden. Es gibt schließlich eine Menge Messungen, die eine Glocke zu ergeben scheinen. Ob es immer die Gauß-Glocke sein muß, könnte man von Fall zu Fall überlegen.**
- **Die ″Forschung″ in der Theoretischen Physik sollte auf den Bereich ″Lehre″ ausgedehnt werden, da immer wieder gute Theoretiker das Problem haben, die Anfragen von Interessierten überhaupt nicht zu verstehen. Auch eine gesunde Sammlung von Irrwegen und nichtigen Ansätzen gehört an und für sich zum Forschungsbereich ″Lehre″.**
  Ein guter Lehrer sollte schließlich immer 'mal wieder eine Anekdote erzählen können. Auch nach Anekdoten muß man forschen, damit es nicht immer dieselben sind.
- **Die Gutgläubigkeit gegenüber mathematischen Betrachtungen sollte immer wieder in Frage gestellt werden. Die Physik ist viel komplizierter als bloß ein bißchen Mathematik.**

Eine umfassende Revision der Physik würde sicher keine Meßergebnisse ändern, wohl aber deren Interpretation. In vielen Bereichen muß man einfach auch Fragen offen lassen können. So etwas würde das Betriebsklima der Universität und auch vieler Firmen erheblich verbessern. Physiker sind dafür bekannt, daß sie ″stur″ sind und ″Recht haben″ - sie haben den Umgang mit Menschen ja auch nie gelernt.

Für Anregungen und Veränderungsvorschläge aller Art bin ich dankbar. Ich liebe das Gespräch mit jeweils Andersdenkenden.

A N H A N G : E I G E N S C H A F T D E S G R E N Z W E R T S :

Der ″Allgemeine″ Grenzwertsatz:

Nun sollte man zumindest auch noch zeigen können, daß jeder Limes (dazu gehören auch Differentiale oder Integrale) in eine stetige Funktion hineingezogen wer= den kann (Das Intervall darf abgeschlossen oder offen sein!):

Sei 'f(x)' stetige Funktion auf einem reellen Intervall 'I', d.h.:

$$| f(x + \delta(\epsilon)) - f(x) | \le \epsilon \qquad \text{für alle } \delta(\epsilon) \le \delta(\epsilon\_0)$$

mit:
- 'x' Funktionswert auf 'I'
- 'δ' Abweichung von 'x' auf Intervall 'I' mit $\delta \to 0$ für $\epsilon \to 0$
- 'ϵ' beliebig kleine, gerade noch positive (reelle) Zahl.

Nun bleibt zu zeigen:

$$\lim_{y \to x} f(y) = f\left[\lim_{y \to x} y \right] \qquad \text{für alle x, A auf I}$$

Falls 'x' nicht am Rand des Definitionsbereichs liegt, ist der Fall selbstre= dend erledigt (Setze 'δ(ϵ)' als Element der Limes-Folge an).

Im Randbereich der Stetigkeit muß man aufpassen, daß die Limes-Folge den zuge= lassenen Stetigkeitsbereich nicht verläßt.

Dies erreicht man durch Definition einer neuen Folge 'z' statt 'y' mit demsel= ben Grenzwert 'x' :

Es galt: $| y(n) - x | \le \epsilon \qquad \text{für alle } n \ge n\_0(\epsilon)$

$\iff \quad | \, | y(n) - x | + x - x \, | \le \epsilon \qquad \text{für alle } n \ge n\_0(\epsilon)$

$\iff \quad | z(n) - x | \le \epsilon \qquad \text{für alle } n \ge n\_0(\epsilon)$

'z(n)' ist hier sicher eine Folge, die stets größer als 'x' ist.

Alternative:

$\iff \quad | - | y(n) - x | \, | \le \epsilon \qquad \text{für alle } n \ge n\_0(\epsilon)$

$\iff \quad | - | y(n) - x | + x - x \, | \le \epsilon \qquad \text{für alle } n \ge n\_0(\epsilon)$

$\iff \quad | z(n) - x | \le \epsilon \qquad \text{für alle } n \ge n\_0(\epsilon)$

'z(n)' ist hier sicher eine Folge, die stets kleiner als 'x' ist.

Damit ist gezeigt, daß sich jede Limes-Folge in eine stetige Funktion hinein= ziehen läßt, falls die Funktion im Wertebereich des Limes und im Grenzwert selbst stetig ist.

Dieser Beweis ist in der Physik vor allem dann interessant, wenn Differential und Integral vertauscht werden sollen. Da man die Stetigkeit aller meßbaren Größen in der Physik voraussetzt (dies läßt sich nicht mit mathematischen Defi= nitionen ″beweisen″, da es hier um Messung geht), muß man beim Vertauschen von Differential und Integral eigentlich nur dann aufpassen, wenn unter dem Inte= gral eine δ-Funktion auftaucht.

A N H A N G B : N A C H T R Ä G L I C H E R E C H N U N G E N

Herkunft des Faktors '½' in der Glockenfunktion, woraus die Normierbarkeit erhalten bleibt:

$$\left[\frac{p}{p+\frac{\sigma\cdot x\cdot v}{n}}\right]^{p\cdot n}\cdot\left[\frac{q}{q-\frac{\sigma\cdot x\cdot v}{n}}\right]^{q\cdot n} \neq 1$$

bzw.:

$$\left[1+\frac{\sigma\cdot x\cdot v}{p\cdot n}\right]^{-p\cdot n}\cdot\left[1-\frac{\sigma\cdot x\cdot v}{q\cdot n}\right]^{-q\cdot n} \neq 1$$

Dies soll nun gezeigt werden. Eine Klärung dieser Schwachstelle erfolgte am 30. 6.1993 nach erneutem Gebet durch Gottes Güte mit folgender Substitution:

Setze: $p = ½ - f$ $q = ½ + f$

Damit folgt:

$$\underbrace{\left[\left[1+\frac{\sigma\cdot x\cdot v}{n\cdot(½-f)}\right]\cdot\left[1-\frac{\sigma\cdot x\cdot v}{n\cdot(½+f)}\right]\right]^{-½\cdot n}}_{\text{Term\_1}}\cdot\underbrace{\left[\frac{\left[1+\frac{\sigma\cdot x\cdot v}{n\cdot(½-f)}\right]}{\left[1-\frac{\sigma\cdot x\cdot v}{n\cdot(½+f)}\right]}\right]^{n\cdot f}}_{\text{Term\_2}}$$

Term_1 ergibt nach Umformungen:

$$\left[1-\frac{\sigma\cdot x\cdot v}{n\cdot(½+f)}+\frac{\sigma\cdot x\cdot v}{n\cdot(½-f)}-\frac{\sigma^2\cdot x^2\cdot v^2}{n\cdot n\cdot p\cdot q}\right]^{-½\cdot n}$$

Es gibt: $\sigma^2=n\cdot p\cdot q$ (siehe oben)

$$=\left[1+\frac{\sigma\cdot x\cdot v\cdot[-(½-f)+(½+f)]}{n\cdot(¼-f^2)}-\frac{x^2\cdot v^2}{n}\right]^{-½\cdot n}$$

$$=\left[\left[1-\frac{\left[-\frac{\sigma\cdot x\cdot v\cdot 2\cdot f}{¼-f^2}+x^2\cdot v^2\right]}{n}\right]^{n}\right]^{-½}$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \text{Term\_1} = e^{+\left[\frac{x^2\cdot v^2}{2} - \frac{\sigma\cdot x\cdot v\cdot f}{\frac{1}{4} - f^2}\right]}$$

Term_2 ergibt nach Umformungen:

$$\left[\frac{1 + \frac{\sigma\cdot x\cdot v}{n\cdot(\frac{1}{2}-f)} - \frac{\sigma\cdot x\cdot v}{n\cdot(\frac{1}{2}+f)} + \frac{\sigma\cdot x\cdot v}{n\cdot(\frac{1}{2}+f)}}{1 - \frac{\sigma\cdot x\cdot v}{n\cdot(\frac{1}{2}+f)}}\right]^{n\cdot f}$$

$$= \left[1 + \frac{\frac{\sigma\cdot x\cdot v}{n\cdot(\frac{1}{2}-f)} + \frac{\sigma\cdot x\cdot v}{n\cdot(\frac{1}{2}+f)}}{1 - \frac{\sigma\cdot x\cdot v}{n\cdot(\frac{1}{2}+f)}}\right]^{n\cdot f} = \left[1 + \frac{\frac{1}{\frac{1}{2} - f} + \frac{1}{\frac{1}{2} + f}}{\frac{n}{\sigma\cdot x\cdot v} - \frac{1}{\frac{1}{2} + f}}\right]^{n\cdot f}$$

Damit folgt für 'n -> ∞':

$$\lim_{n\to\infty} \left[1 + \frac{\frac{1}{\frac{1}{4} - f^2}}{n\cdot\left[\frac{1}{\sigma\cdot x\cdot v} - \underbrace{\frac{1}{n\cdot(\frac{1}{2}+f)}}_{\to\, 0}\right]}\right]^{n\cdot f} = e^{+\left[\frac{\sigma\cdot x\cdot v}{\frac{1}{4}-f^2}\right]\cdot f}$$

Damit ergibt sich als Grenzwert von Term_1 und Term_2:

$$\lim_{n\to\infty} \text{Term\_1} \cdot \text{Term\_2} = e^{+\left[\frac{x^2\cdot v^2}{2} - \frac{\sigma\cdot x\cdot v\cdot f}{\frac{1}{4} - f^2}\right] + \frac{\sigma\cdot x\cdot v\cdot f}{\frac{1}{4} - f^2}} = e^{+\frac{1}{2}\cdot x^2\cdot v^2}$$

Daraus folgt schließlich:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} B\_k(n,p)\cdot v\cdot\sigma = \frac{v\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot x^2\cdot v^2}}{\sqrt{(2\cdot\pi)}}$$

Dieses Ergebnis erhält die Normierung auch im Grenzfall, so daß wieder viel Klarheit bezüglich der Erhaltung einer Normierung im Grenzwert herrscht.

Die Rücksubstitution von 'x' führt schließlich -wie schon gezeigt- auf die Gleichverteilung, bei der die normierte Einzelwahrscheinlichkeit verschwindet:

$$\lim_{n\to\infty} B\_k(n,p) = \lim_{n\to\infty} p^{k} \cdot (1 - p)^{n-k} \cdot \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(p+1)\cdot\Gamma(n-p+1)} = 0$$

Dies gilt für '0 < p < 1' und '0 < k < n + 1' für reellwertige 'n','p' und 'k'.