Arbeit und Energie

4. Vorlesung Physik I für Wirtschaftsingenieure

Auftraggeber:10.11.2004 Professor Dr. Volker Beck, FH Aalen
Bearbeitung: 10.11.2004 – 11.11.2004 Dr. Norbert Südland
Letzte Berechnung: 11.11.2004 Dr. Norbert Südland

■ 4.1. Energie

■ 4.1.1. Definition Arbeit

■ 4.1.1.1. Hinführung

Palettenwagen:

• Horizontale Verschiebung kann problemlos von Hand erfolgen.

• Hebe-Pumpe: Arbeit gegen die Schwerkraft leisten.

• Größere Höhe: Entsprechend mehr Arbeit.

• Entriegelung: Palette sinkt selbständig nach unten.

■ 4.1.1.2. Mathematische Definition

Die Arbeit $\boldsymbol{W}$ (Engl.: *work*) ist das Skalarprodukt aus der Kraft $\vec{\boldsymbol{F}}$ (in Wegrichtung) und dem Weg $\vec{\boldsymbol{s}}$:

$$W == s\,F_s == F\,\mathrm{Cos}[\alpha]\,s == \vec{F}.\vec{s} \tag{4.1}$$

■ 4.1.1.3. Integral-Darstellung

Wenn sich die Kraft $\vec{\boldsymbol{F}}$ längs des Wegs ändert, ergibt sich ein *Summen-Integral*:

$$W_{12} == \int_{\vec{s}_1}^{\vec{s}_2} d\,W == \int_{\vec{s}_1}^{\vec{s}_2} \vec{F}\left[\vec{s},\, \vec{v}\right].d\,\vec{s} \tag{4.2}$$

■ 4.1.1.4. Physikalische Einheit

Die SI-Einheit der Arbeit ist das *Joule*:

$$[W] == [F] \cdot [s] == \frac{\text{kg}\, m^2}{s^2} == N\, m == J == \text{Ws} == \frac{\text{kWh}}{3600000} \tag{4.3}$$

■ 4.1.2. Hubarbeit

■ 4.1.2.1. Konstanter Ortsfaktor

Für einen konstanten Ortsfaktor ergibt das Summen-Integral (4.2) *gegen* die Gewichtskraft $\vec{G} == -m\, \vec{g}$:

$$\boxed{W_{12} == \int_{h_1}^{h_2} m\, g\, ds == m\, g\, (h_2 - h_1) == m\, g\, \Delta\text{h}} \tag{4.4}$$

■ 4.1.2.2. Reibungsfreie schiefe Ebene

Es wird Arbeit *gegen* den Hangabtrieb $F_H == -G\, \text{Sin}[\alpha] == -m\, g\, \text{Sin}[\alpha]$ geleistet:

$$\boxed{W_{12} == \int_{s_1}^{s_2} m\, g\, \text{Sin}[\alpha]\, ds == m\, g\, \text{Sin}[\alpha]\, \Delta\text{s}} \tag{4.5}$$

Mit $\text{Sin}[\alpha] == \frac{\Delta\text{h}}{\Delta\text{s}}$ folgt: $W_{12} == m\, g\, \Delta\text{h}$.

Die zu leistende Arbeit ist hier unabhängig vom Verlauf des Weges und nur von der Höhendifferenz abhängig.

■ 4.1.2.3. Newtonsche Gravitationskraft

Falls die Hubhöhe gross ist und die Fallbeschleunigung variabel:

$$g[r] == -9.81\, \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\, \frac{R_{\text{Erde}}^2}{r^2}$$

$$F[r] == m\, g_{\text{Erde}}\, \frac{R_{\text{Erde}}^2}{r^2}$$

$$W_{12} == \int_{r_1}^{r_2} F[r]\, dr == \int_{r_1}^{r_2} m\, g_{\text{Erde}}\, \frac{R_{\text{Erde}}^2}{r^2}\, dr == -m\, g_{\text{Erde}}\, R_{\text{Erde}}^2 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

$$\boxed{W_{12} == m\, g_{\text{Erde}}\, R_{\text{Erde}}^2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} \tag{4.6}$$

Schuss einer Rakete von der Erdoberfläche $r_1 == R_{\text{Erde}}$ ins Unendliche ($r_2 == \infty$):

$$W_{12} == m\, g_{\text{Erde}}\, R_{\text{Erde}}$$

▪ 4.1.2.4. Hinweis auf reduziertes Potenzial

• Bei der Lösung der dynamischen Differentialgleichungen zum 2-Körper-Problem taucht ein *reduziertes* Potenzial $\boldsymbol{V_{red}}$ (vgl. [HT1956], § 118., Gleichungen (22)+(26), Seite 214) auf, das von Formel (4.6) abweicht:

$$\Delta V_{red} == V_{red}[r_2] - V_{red}[r_1] == -\gamma \frac{(m+M)}{r_2} + \gamma \frac{(m+M)}{r_1} == \gamma\,(m+M)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \tag{4.7}$$

• Zum Vergleich mit Formel (4.6): $\boldsymbol{\gamma\, M == g_{Erde}\, R_{Erde}^2}$.

• Hubarbeit zu Formel (4.7): Naheliegende Verallgemeinerung $\boldsymbol{W_{12} == m\, \Delta V_{red}}$ wird falsch, denn $\boldsymbol{W_{12} == \gamma\, m\, M\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}$ nach Formel (4.6).

• Merke: *Es gibt Differentialgleichungen, die nur noch über ein reduziertes Potenzial lösbar sind.*

Der Arbeits- und Energiebegriff stammt ursprünglich aus der Lösungstheorie spezieller Differentialgleichungen und wird so angewandt, dass sich die Differentialgleichung lösen läßt.

▪ 4.1.3. Beschleunigungsarbeit ohne Reibung

▪ 4.1.3.1. Erster Zugang

Gleichmäßige Beschleunigung: $\boldsymbol{a}$ **== konst**.

Integration liefert:

$$v[t] == v[t_1] + a\,(t - t_1) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (t - t_1) == \frac{v[t] - v[t_1]}{a}$$

$$\begin{aligned}\Delta s[t] == s[t] - s[t_1] == \int_{t_1}^{t} v[t]\, dt &== v[t_1]\,(t - t_1) + a\,\frac{(t-t_1)^2}{2} \\ &== v[t_1]\left(\frac{v[t]-v[t_1]}{a}\right) + \frac{a}{2}\left(\frac{v[t]-v[t_1]}{a}\right)^2 \\ &== \frac{v[t_1]\,v[t]}{a} - \frac{v[t_1]^2}{a} + \frac{v[t]^2}{2a} - \frac{v[t]\,v[t_1]}{a} + \frac{v[t_1]^2}{2a} \\ &== \frac{1}{2a}\,(v[t]^2 - v[t_1]^2)\end{aligned}$$

Mit $\boldsymbol{t \to t_2}$ folgt:

$$W_{12} == F\,(s[t_2] - s[t_1]) == m\,a\,(s[t_2] - s[t_1])$$

also:

$$\boxed{W_{12} == \frac{1}{2}\, m\,(v[t_2]^2 - v[t_1]^2)} \tag{4.8}$$

4.1.3.2. Allgemeinerer Zugang

Kürzere und allgemeinere Herleitung:

$$W_{12} == \int_{\vec{s}[t_1]}^{\vec{s}[t_2]} \vec{F}.d\vec{s} == \int_{t_1}^{t_2} \left(\vec{F}.\frac{d\vec{s}}{dt}\right) dt == \int_{t_1}^{t_2} m\left(\frac{d\vec{v}}{dt}.\vec{v}\right) dt$$

$$== \int_{\vec{v}[t_1]}^{\vec{v}[t_2]} m\,\vec{v}.d\vec{v} == \frac{1}{2}\,m\,(v[t_2]^2 - v[t_1]^2)$$

4.1.3.3. Sonderfall

Anmerkung: Wenn $\vec{F} \perp d\vec{s}$, dann resultiert $W == 0$.

Beispiel: gleichförmige Kreisbewegung; $\vec{F}$ ist dann die Zentripetalkraft.

Ein Erdsatellit, der erst einmal eine (kreisförmige) Umlaufbahn erreicht hat, muss keine weitere Arbeit verrichten, um "oben" zu bleiben.

4.1.4. Arbeit gegen eine Feder

4.1.4.1. Arbeit, um eine Feder zu dehnen /stauchen

Die Arbeit muß gegen die elastische Rückstellkraft der Feder geleistet werden: $\vec{F}_{\mathrm{el}} == -D\,\vec{s}$:

$$W_{12} == \int_{s_1}^{s_2} \vec{F}[\vec{s}].d\vec{s} == D\int_{s_1}^{s_2} \vec{s}.d\vec{s} == \frac{1}{2}\,D\,(s_2^2 - s_1^2)$$

$$\boxed{W_{12} == \frac{1}{2}\,D\,(s_2^2 - s_1^2)} \quad (4.9)$$

4.1.5. Reibungsarbeit

4.1.5.1. Grundlegende Eigenschaft der Reibung

Die Reibungskraft ist *immer parallel* zur Bewegungsrichtung eines Körpers und bremst diesen ab.

4.1.5.2. Haftreibung

Bestimmung durch Maximalneigung einer schiefen Ebene:

Hangabtrieb $-m\,g\,\mathrm{Sin}[\alpha]$ ist gleich der Haftreibung, die proportional zur Normalkraft $-m\,g\,\mathrm{Cos}[\alpha]$ ist. Der Haftreibungskoeffizient μ_H ist der zugehörige *Proportionalitätsfaktor*:

$$-\mu_H\,m\,g\,\mathrm{Cos}[\alpha_H] == -m\,g\,\mathrm{Sin}[\alpha_H]$$

$$\mu_H == \text{Tan}[\alpha_H] \tag{4.10}$$

4.1.5.3. Gleitreibung

Wie Haftreibung, aber durch Neigungswinkel α_G des *gleichmäßigen Gleitens* bestimmt:

$$\mu_G == \text{Tan}[\alpha_G] \tag{4.11}$$

Normal: Gleitreibungskoeffizient $\mu_G < \mu_H$.

4.1.5.4. Rollreibung

Rollreibungskoeffizient f_R auch auf schiefer Ebene (Neigungswinkel α) zu bestimmen:

- Deutlich kleiner als bei Gleit- oder Haftreibung,
- Bevorzugbar niedrig bei Körpern mit kreisrundem Querschnitt.

Bestimmung von f_R durch *Momentengleichgewicht*, so dass Rollreibungskraft F_R

$$F_R == \frac{f_R}{r} F_N == \frac{f_R}{r} m\, g\, \text{Cos}[\alpha] \tag{4.12}$$

resultiert (vgl. [Stö1998], Abschnitt 2.2.3.3.2, Seite 52).

4.1.6. Energiesatz

4.1.6.1. Definition Energie

(Mechanische) Energie ist die Fähigkeit, Arbeit zu verrichten.

In der Physik interessieren immer nur Energie-Differenzen und nicht absolute Energie-Beträge.

4.1.6.2. In Worten

Die Summe aller Energien eines Systems sei konstant.

4.1.6.3. Als Formel

$$\sum_{\mu=1}^{n} W_\mu \overset{!}{==} E == \text{konst.} \tag{4.13}$$

Bei Reibung: Energiesatz wird durch Wärmeenergie ergänzt.

Wärmeenergie läßt sich nicht mehr vollständig in mechanische Energie zurückführen.

■ 4.2. Leistung

■ 4.2.1. Definition

■ 4.2.1.1. In Worten

Leistung ***P*** (Engl.: *power*) ist *Arbeit pro Zeit*:

$$\boxed{P == \frac{\Delta \mathrm{W}}{\Delta \mathrm{t}} == \lim_{\Delta \mathrm{t} \to 0} \frac{\Delta \mathrm{W}}{\Delta \mathrm{t}} == \frac{\partial W}{\partial t} == \frac{dW}{dt}} \quad (4.14)$$

Mechanik:

$$\boxed{P == \frac{d\left(\int_{\vec{s}_1}^{\vec{s}_2} \vec{F}.d\vec{s}\right)}{dt} == \vec{F}.\frac{d\vec{s}}{dt} == \vec{F}.\vec{v}} \quad (4.15)$$

Formel (4.15) ist auch für $\vec{F}[\vec{s}, \vec{v}]$ korrekt.

■ 4.2.1.2. Einheit

SI-Einheit der Leistung: **1 *W*** (Watt):

$$[P] == [F] \cdot [v] == \frac{\mathrm{kg}\, m^2}{s^3} == N \frac{m}{s} == \frac{J}{s} == W \quad (4.16)$$

Früher: **1 PS** (Pferdestärke) **== 75 kp ∗ 1** $\frac{m}{s}$:

$$\boldsymbol{m\, g\, v\; /.\; \left\{m \to 75\, \text{"kg"},\; g \to 9.81\, \frac{\text{"m"}}{\text{"s"}^2},\; v \to 1\, \frac{\text{"m"}}{\text{"s"}}\right\}}$$

$$\frac{735.75\, \mathrm{kg\, m^2}}{\mathrm{s^3}}$$

Also: **1 PS == 735.75 *W***.

■ 4.2.2. Wirkungsgrad *η*

■ 4.2.2.1. Definition in Worten

$$\text{Wirkungsgrad} == \frac{\text{effektive oder nutzbare Leistung}}{\text{zugeführte oder Nennleistung}}$$

■ 4.2.2.2. Definition als Formel

$$\eta == \frac{P_{\text{eff}}}{P_N} \qquad 0 \leq \eta \leq 1 \tag{4.17}$$

■ 4.2.3. Beispiel Förderkorb

■ 4.2.3.1. Aufgabe

(Masseloses) Seil mit (masseloser) Rolle (Trommel), Förderkorb mit Nutzlast $\boldsymbol{m_1 == 1000\,\mathrm{kg}}$, Gegengewicht $\boldsymbol{m_2 == 450\,\mathrm{kg}}$. Beschleunigung des Förderkorbs nach oben mit $\boldsymbol{a == 1\,\frac{m}{s^2}}$, bis konstante Geschwindigkeit $\boldsymbol{v == 5\,\frac{m}{s}}$ erreicht wird, dann konstante Fördergeschwindigkeit $\boldsymbol{v == 5\,\frac{m}{s}}$. Reibungskraft an der Trommel $\boldsymbol{F_R == 500\,N}$, Wirkungsgrad $\boldsymbol{\eta == 0.90}$. Wie groß ist die Nennleistung als Funktion der Zeit?

■ 4.2.3.2. Bekannte Größen

bekannt =

$$\boldsymbol{\left\{m_1 \to 1000\,\text{"kg"},\, m_2 \to 450\,\text{"kg"},\, g \to 10\,\frac{\text{"m"}}{\text{"s"}^2},\, a \to 1\,\frac{\text{"m"}}{\text{"s"}^2},\, F_R \to 500\,\text{"N"},\, \eta \to 0.9,\, v \to 5\,\frac{\text{"m"}}{\text{"s"}}\right\}}$$

$$\left\{m_1 \to 1000\,\mathrm{kg},\, m_2 \to 450\,\mathrm{kg},\, g \to \frac{10\,\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2},\, a \to \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2},\, F_R \to 500\,\mathrm{N},\, \eta \to 0.9,\, v \to \frac{5\,\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right\}$$

■ 4.2.3.3. Anfahren mit $a == 1\,\frac{m}{s^2}$ für $0 \leq t \leq 5\,s$

Kraft $\boldsymbol{F}$ am Umfang der Trommel:

$$\boldsymbol{\text{Kraft[Anfahren]} = \{F \to (m_1 - m_2)\,g + (m_1 + m_2)\,a + F_R\}\ /.\ \text{bekannt}\ /.\ \left\{\text{"kg"} \to \frac{\text{"N"}\,\text{"s"}^2}{\text{"m"}}\right\}}$$

$$\{F \to 7450\,\mathrm{N}\}$$

$$P_N[t] == \frac{P_{\text{eff}}}{\eta} == \frac{F\,v[t]}{\eta} == \frac{F\,a}{\eta}\,t$$

$$\boldsymbol{\text{Nennleistung[Anfahren]} = \left\{P_N \to \frac{F\,a}{\eta}\,t\right\}\ /.\ \text{Kraft[Anfahren]}\ /.\ \text{bekannt}\ /.\ \left\{\text{"N"} \to \frac{\text{"kW"}\,\text{"s"}}{1000\,\text{"m"}}\right\}}$$

$$\left\{P_N \to \frac{8.27778\,\mathrm{kW}\,t}{\mathrm{s}}\right\}$$

Nennleistung steigt linear mit der Zeit bis auf

$$\boldsymbol{P_N\ /.\ \text{Nennleistung[Anfahren]}\ /.\ \{t \to 5\,\text{"s"}\}}$$

$$41.3889\,\mathrm{kW}$$

■ 4.2.3.4. Konstante Geschwindigkeit $v == 5\,\frac{m}{s}$ für $t \geq 5\,s$

$$\text{Kraft[Transport]} = \{F \to (m_1 - m_2)\,g + F_R\} \;\text{/. bekannt /.}\; \left\{\text{"kg"} \to \frac{\text{"N" "s"}^2}{\text{"m"}}\right\}$$

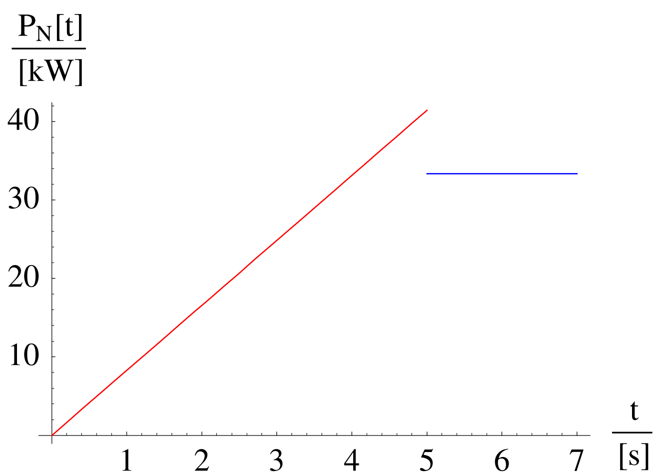
$\{F \to 6000\,\text{N}\}$

$$\text{Nennleistung[Transport]} = \left\{P_N \to \frac{F\,v}{\eta}\right\} \;\text{/. Kraft[Transport] /. bekannt /.}\; \left\{\text{"N"} \to \frac{\text{"kW" "s"}}{1000\,\text{"m"}}\right\}$$

$\{P_N \to 33.3333\,\text{kW}\}$

■ 4.2.3.5. Schaubild

```
$DefaultFont = {"Times", 12.};
Kurve[Anfahren] = Plot[Evaluate[P_N/"kW" /. Nennleistung[Anfahren] /. {t -> t "s"}], {t, 0, 5},
    PlotStyle -> Hue[0], AxesLabel -> {"t/[s]", "P_N[t]/[kW]"}, DisplayFunction -> Identity];
Kurve[Transport] = Plot[Evaluate[P_N/"kW" /. Nennleistung[Transport] /. {t -> t "s"}],
    {t, 5, 7}, PlotStyle -> Hue[2/3], DisplayFunction -> Identity];
Schaubild = Show[Kurve[Anfahren], Kurve[Transport], DisplayFunction -> $DisplayFunction];
```



Ein plötzlicher Leistungswechsel ist möglich, da sich die Kraft plötzlich ändern darf.

■ 4.3. Anwendung des Energiesatzes

■ 4.3.1. Energie == gespeicherte Arbeit

Durch Zufuhr bzw. Abgabe von Arbeit wird die Energie eines Körpers (oder Systems) erhöht bzw. erniedrigt.

$$\Delta E == E_{\text{nachher}} - E_{\text{vorher}} == \Delta W \quad (4.18$$

■ 4.3.2. Energieformen

werden durch die Arbeit, die sie erzeugt haben, beschrieben:

• Beschleunigungsarbeit → kinetische oder Bewegungsenergie:

$$E_{\text{kin}} == \frac{1}{2} m v^2 \quad (4.19)$$

• Hubarbeit → potenzielle oder Lageenergie:

$$E_{\text{pot}} == E_{\text{Lage}} == m g h \quad (4.20)$$

• Verformungsarbeit → auch potenzielle, aber elastische Energie:

$$E_{\text{pot}} == E_{\text{elast}} == \frac{1}{2} D s^2 \quad (4.21)$$

Die Energieformen (nicht als Differenz) hängen davon ab,

• auf welches Koordinatensystem $\vec{v}$ bezogen ist (E_{kin}),

• wo das Bezugsniveau $h == 0$ liegt (E_{Lage}),

• wo der Ausgangszustand $s == 0$ liegt (E_{elast}).

■ 4.3.3. Aufgaben zum Energiesatz

Anwendung des Energiesatzes bei vollständiger Energie-Umwandlung, da die Gesamtenergie konstant bleibt:

• Abfangfeder: $E_{\text{kin}} \to E_{\text{elast}}$

• Freier Fall: $E_{\text{Lage}} \to E_{\text{kin}}$

• Trampolin: $E_{\text{Lage}} \to E_{\text{kin}} \to E_{\text{elast}}$

• Bremsweg: $E_{\text{kin}} \to W_{\text{Reibung}}$

• Bremsweg: $E_{\text{kin}} \to W_{\text{Verformung}}$

Aufgaben zum Energiesatz beginnen mit einer *Energiebilanz*, eventuell mit einer Leistungsbilanz.

■ 4.4. Protokoll

Die Version von *Mathematica* lautet:

{$Version, $ReleaseNumber, $LicenseID}

{Microsoft Windows 3.0 (October 6, 1996), 0, 0}

Die Berechnungszeit betrug (in Sekunden):

TimeUsed[]

0.73

Literatur

[HT1956]
Hort W., Thoma A. *Die Differentialgleichungen der Technik und Physik*, Johann Ambrosius Barth Verlag Leipzig, 7. Auflage, (1956)

[Stö1998]
Stöcker H., *Taschenbuch der Physik*, Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main, 3. überarbeitete und erweiterte Auflage, (1998)