Impuls und Stoss

5. Vorlesung Physik I für Wirtschaftsingenieure

Auftraggeber: 10.11.2004 Professor Dr. Volker Beck, FH Aalen
Bearbeitung: 12.11.2004 – 13.11.2004 Dr. Norbert Südland
Letzte Berechnung: 13.11.2004 Dr. Norbert Südland
Letzte Korrektur: 14. 1.2005 Dr. Norbert Südland

■ 5.1. Impulssatz

■ 5.1.1. Erstes Newtonsches Axiom

■ 5.1.1.1. Wiederholung

Ein unbeschleunigter Körper beharrt im Zustand seiner geradlinigen Bewegung oder befindet sich in Ruhe.

■ 5.1.1.2. Schwerpunktsatz

Gasförmiger Körper: viele Einzelteile mit Schwerpunkt $\vec{S}$:

$$\vec{S} == \frac{\sum_{\mu=1}^{n} m_\mu \vec{s}_\mu}{\sum_{\mu=1}^{n} m_\mu} == \frac{\int\int\int \rho[x,\ y,\ z]\, \vec{s}[x,\ y,\ z]\, dx\, dy\, dz}{\int\int\int \rho[x,\ y,\ z]\, dx\, dy\, dz} \tag{5.1}$$

Bei unbeschleunigtem System: Schwerpunktsatz:

Der Schwerpunkt eines unbeschleunigten Systems beharrt im Zustand seiner geradlinigen Bewegung oder befindet sich in Ruhe.

Geschwindigkeit $\vec{u} == \frac{\partial \vec{S}}{\partial t}$ des Schwerpunkts mit $\vec{v}_\mu == \frac{\partial \vec{s}_\mu}{\partial t}$:

$$\vec{u} == \frac{\partial \vec{S}}{\partial t} == \frac{\sum_{\mu=1}^{n} m_\mu \vec{v}_\mu}{\sum_{\mu=1}^{n} m_\mu} == \frac{\int\int\int \rho[x,\ y,\ z]\, \vec{v}[x,\ y,\ z]\, dx\, dy\, dz}{\int\int\int \rho[x,\ y,\ z]\, dx\, dy\, dz} \tag{5.2}$$

Bei Gas: $\vec{u}$ sehr viel kleiner als die einzelnen $\vec{v}_\mu$, da *vektorielle Summe.*

5.1.1.3. Impulssatz

Impulserhaltungssatz aus (5.2):

$$\boxed{\sum_{\mu=1}^{n} m_\mu \vec{v}_\mu == \text{konst.}} \tag{5.3}$$

5.1.2. Stossgesetze

5.1.2.1. Vollplastischer Stoss

Beispiel: Schrotflinte auf Holzblock.

Geschwindigkeit nach dem Stoss: $\boldsymbol{u}$ (hier: Schwerpunktgeschwindigkeit):

$$\sum_{\mu=1}^{n} m_\mu \vec{v}_\mu == \vec{u} \sum_{\mu=1}^{n} m_\mu \tag{5.4}$$

"Verletzung" des Energiesatzes, also Ergänzung durch Verformungsarbeit $\mathbf{\Delta W > 0}$:

$$\sum_{\mu=1}^{n} \frac{m_\mu \vec{v}_\mu^{\,2}}{2} == \frac{\vec{u}^{\,2}}{2} \sum_{\mu=1}^{n} m_\mu + \Delta \mathrm{W} \tag{5.5}$$

5.1.2.2. Vollelastischer Zweierstoss

Geschwindigkeiten nach dem Stoss: $\vec{\boldsymbol{u}}_\mu$

Energiesatz und Impulssatz gelten, also 2 Gleichungen für 2 Unbekannte $\boldsymbol{u}_1$ und $\boldsymbol{u}_2$:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 == m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2$$

$$\frac{1}{2}\left(m_1 \vec{v}_1^{\,2} + m_2 \vec{v}_2^{\,2}\right) == \frac{1}{2}\left(m_1 \vec{u}_1^{\,2} + m_2 \vec{u}_2^{\,2}\right)$$

Umformung nach Hering et al. ([HMS2004], Abschnitt 2.7.2, Seite 53):

$$m_1 \left(\vec{v}_1 - \vec{u}_1\right) == -m_2 \left(\vec{v}_2 - \vec{u}_2\right) \tag{5.6}$$

$$\begin{aligned} & m_1 \left(\vec{v}_1^{\,2} - \vec{u}_1^{\,2}\right) == -m_2 \left(\vec{v}_2^{\,2} - \vec{u}_2^{\,2}\right) \\ \Longleftrightarrow \quad & m_1 \left(\vec{v}_1 - \vec{u}_1\right)\left(\vec{v}_1 + \vec{u}_1\right) == -m_2 \left(\vec{v}_2 - \vec{u}_2\right)\left(\vec{v}_2 + \vec{u}_2\right) \end{aligned} \tag{5.7}$$

(5.6) in (5.7):

$$m_1 \left(\vec{v}_1 - \vec{u}_1\right)\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2 == -\left(\vec{u}_1 - \vec{u}_2\right)\right) \tag{5.8}$$

Die Relativgeschwindigkeiten kehren sich also um.

Jetzt Auflösung nach z.B. u_1:

Teilergebnis[1] = Solve[$v_1 - v_2 == -(u_1 - u_2)$, u_1] // Flatten

$\{u_1 \to u_2 - v_1 + v_2\}$

(5.8) in (5.6):

Teilergebnis[2] = Solve[$m_1\,(v_1 - u_1) == -m_2\,(v_2 - u_2)$ /. Teilergebnis[1], u_2] // Flatten // Simplify

$$\left\{u_2 \to \frac{m_1\,(2\,v_1 - v_2) + m_2\,v_2}{m_1 + m_2}\right\}$$

Rücksubstitution:

Teilergebnis[3] = Teilergebnis[1] /. Teilergebnis[2] // Simplify

$$\left\{u_1 \to \frac{m_1\,v_1 - m_2\,(v_1 - 2\,v_2)}{m_1 + m_2}\right\}$$

Scharfer Blick mit

Schwerpunktgeschwindigkeit = $\left\{u \to \dfrac{m_1\,v_1 + m_2\,v_2}{m_1 + m_2}\right\}$

$$\left\{u \to \frac{m_1\,v_1 + m_2\,v_2}{m_1 + m_2}\right\}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\vec{u}_1 == 2\,\vec{u} - \vec{v}_1 \\ \vec{u}_2 == 2\,\vec{u} - \vec{v}_2\end{array}} \qquad (5.9)$$

Probe:

$u_1 == 2\,u - v_1$ /. Teilergebnis[3] /. Schwerpunktgeschwindigkeit
% // Simplify

$$\frac{m_1\,v_1 - m_2\,(v_1 - 2\,v_2)}{m_1 + m_2} == -v_1 + \frac{2\,(m_1\,v_1 + m_2\,v_2)}{m_1 + m_2}$$

True

$u_2 == 2\,u - v_2$ /. Teilergebnis[2] /. Schwerpunktgeschwindigkeit
% // Simplify

$$\frac{m_1\,(2\,v_1 - v_2) + m_2\,v_2}{m_1 + m_2} == -v_2 + \frac{2\,(m_1\,v_1 + m_2\,v_2)}{m_1 + m_2}$$

True

■ 5.1.2.3. Realer Stoss

Weiterer scharfer Blick zur Zusammenfassung mit Stossparameter ϵ:

$$\boxed{\vec{u}_\mu == \vec{u} + \epsilon\left(\vec{u} - \vec{v}_\mu\right)} \quad (5.10$$

Probe Impulssatz:

$$\sum_{\mu=1}^{n} m_\mu \vec{v}_\mu == \sum_{\mu=1}^{n} m_\mu \left(\vec{u} + \epsilon\left(\vec{u} - \vec{v}_\mu\right)\right)$$

Für jedes ϵ gilt:

$$\Longleftrightarrow \sum_{\mu=1}^{n} m_\mu v_\mu == u \sum_{\mu=1}^{n} m_\mu$$

Also wahre Aussage für

$$u == \frac{\sum_{\mu=1}^{n} m_\mu v_\mu}{\sum_{\mu=1}^{n} m_\mu}$$

Energiesatz wird für $\mathbf{0 \leq \epsilon \leq 1}$ angepasst mit $\mathbf{\Delta W \geq 0}$:

$$\sum_{\mu=1}^{n} \frac{m_\mu \vec{v}_\mu^{\,2}}{2} == \sum_{\mu=1}^{n} \frac{m_\mu \vec{u}_\mu^{\,2}}{2} + \Delta W \quad (5.11)$$

(5.10) in (5.11) ergibt (Übungsaufgabe!):

$$\boxed{\Delta W == \left(1 - \epsilon^2\right)\left(\sum_{\mu=1}^{n} \frac{m_\mu \vec{v}_\mu^{\,2}}{2} - \sum_{\mu=1}^{n} \frac{m_\mu \vec{u}^{\,2}}{2}\right)} \quad (5.12)$$

Gleiche Formel (bis auf Druckfehler!) wie (5.12) für ***n* == 2** bei Hering et al. ([HMS2004], Abschnitt 2.7.3., Formel (2-90), Seite 56). Bei Stöcker ([Stö1998], Abschnitt 2.6.4, Seite 71) steht die Formel (5.12) noch nicht.

Zum Vergleich mit der Literatur:

$$\mathbf{\left(1 - \epsilon^2\right)\left(\sum_{\mu=1}^{n} \frac{m_\mu v_\mu^2}{2} - \sum_{\mu=1}^{n} \frac{m_\mu u^2}{2}\right) /. \left\{n \to 2,\ u \to \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}\right\} // \text{Simplify}}$$

$$-\frac{\left(-1 + \epsilon^2\right) m_1 m_2 \left(v_1 - v_2\right)^2}{2\left(m_1 + m_2\right)}$$

▪ 5.1.2.4. Vertiefte Heuristik

Formel (5.10) ermöglicht vertiefte Heuristik:

Geschwindigkeiten vor dem Stoss:

$$\vec{v}_\mu == \vec{u} + \left(-\vec{u} + \vec{v}_\mu\right)$$

Geschwindigkeiten nach dem Stoss:

$$\vec{u}_\mu == \vec{u} - \epsilon\left(-\vec{u} + \vec{v}_\mu\right) == \vec{u} + \epsilon\left(\vec{u} - \vec{v}_\mu\right)$$

Für $\boldsymbol{\epsilon == 1}$: Totalreflexion am gemeinsamen Schwerpunkt:

$$\vec{u}_\mu - \vec{u} == \vec{u} - \vec{v}_\mu$$

Konsequenz: Selbst Teilchen der Masse $\boldsymbol{m = 0}$ erfahren eine Reflexion nach den Stossgesetzen (Explizite Rechnung von Hand für Zweierstoss unter Vermeidung eines Teilens oder Multiplizierens mit $\boldsymbol{m == 0}$: 4 Seiten DIN A 4). Dann ist $\boldsymbol{u}$ die Geschwindigkeit der reflektierenden Wand, vgl. Tischtennis.

■ 5.1.2.5. Historischer Trugschluss

Nach den hier hergeleiteten Stossgesetzen lässt sich auch *Licht am bewegten Spiegel beschleunigen oder abbremsen*!

Fazit: Michelson-Interferometer zum Nachweis des Lichtäthers funktioniert nicht, da nach der Reflexion am Strahlteiler oder Einlenkspiegel isotrope Verhältnisse zu erwarten sind.

Merke: *Die Einsteinsche Relativitätstheorie ist eine mögliche, aber nicht zwingende Theorie.*

Zwingende Schlussfolgerungen sind Merkmal der Kantschen Philosophie und veranlassten Einstein zur Schaffung einer (nicht: der) Relativitätstheorie.

Fazit: "Heute weiss man" und "hier folgt zwingend" hat keinen Sinn in der Physik: Zu einem messbaren Sachverhalt sind immer mehrere verschiedene Theorien möglich.

Wichtig: *Die Physik ist eine Baustelle: Betreten auf eigene Gefahr!*

■ 5.2. Anwendungen

■ 5.2.1. Raketengleichung

■ 5.2.1.1. Rückstoßprinzip

Rakete: Materieteilchen in vorgegebene Richtung über längeren Zeitraum abschiessen.

Gesamtimpuls von Rakete und ausgestoßenen Teilchen bleibt konstant, so daß Rakete durch ausströmende *Stützmasse* Rückstoß erfährt. $\Longrightarrow$ Beschleunigung.

■ 5.2.1.2. Beispiel Mondrakete Saturn V

Daten der Mondrakete Saturn V (vgl. [HMS2004], Tabelle 2-4, Seite 46; ähnlich bei [Stö1998], Abschnitt 2.7.1, Seite 73):

Startmasse m_0	2.9 kt
Leermasse m_{leer}	0.82 kt

Brennschlußzeit t_B	$160\,s$
Relativgeschwindigkeit v_{rel}	$2.6\,\frac{\text{km}}{s}$
Massenstrom $\partial_t m[t]$	$13\,\frac{t}{s}$
Schub F_{Schub}	34 MN

Also $\mathbf{13}\,t$ Wasserdampf mit $v = 2.6\,\frac{\text{km}}{s}$ aus Brennkammer (Schallgeschwindigkeit in Luft: $\approx 340\,\frac{m}{s}$).

■ 5.2.1.3. Raketengleichung

Herleitung der Raketengleichung (vgl. [HMS2004], Abschnitt 2.5.3., Seite 45–47):

Zeitliche Änderung des Impulses ergibt folgende Bilanz:

Off[General::spell]
Impulsbilanz = ((m + Δm) (v + Δv) − v_T Δm) − m v // ExpandAll

$v\,\Delta\text{m} + m\,\Delta\text{v} + \Delta\text{m}\,\Delta\text{v} - \Delta\text{m}\,v_T$

Bei **Δm** steht $v + \Delta\text{v} - v_T == v_{\text{rel}}$, also Relativgeschwindigkeit von Rakete und ausströmender Stützmasse. v_{rel} kann als zeitlich konstant angesehen werden.

Daraus Newtonsche Kraftbilanz:

$$\textbf{Kraftbilanz} = \frac{\textbf{Impulsbilanz}}{\Delta\textbf{t}}\ /.\ \{v_T \to v + \Delta\text{v} - v_{\text{rel}}\}\ //\ \textbf{ExpandAll}$$

$$\frac{m\,\Delta\text{v}}{\Delta\text{t}} + \frac{\Delta\text{m}\,v_{\text{rel}}}{\Delta\text{t}}$$

Nur formal ähnlich mit:

$\partial_t\,(m[t]\,v[t])$

$v[t]\,m'[t] + m[t]\,v'[t]$

Übergang $\Delta\text{t} \to 0$ ergibt Raketengleichung:

Raketengleichung[1] = Kraftbilanz == −m g /. {m → m[t], Δm → Δt m'[t], Δv → Δt v'[t]}

$v_{\text{rel}}\,m'[t] + m[t]\,v'[t] == -g\,m[t]$

Dabei beschreibt $-m'[t]\,v_{\text{rel}}$ die Schubkraft auf die Rakete.

Auflösung nach Beschleunigung $a[t] == v'[t]$ ergibt (vgl. [HMS2004], Formel (2-58), Seite 46):

Raketengleichung[2] =
Solve[Raketengleichung[1], v'[t]] /. {Rule → Equal} // Flatten // First // ExpandAll

$$v'[t] == -g - \frac{v_{\text{rel}}\,m'[t]}{m[t]}$$

Weitere realistische Annahme: Massenstrom $\boldsymbol{m}\,'[\boldsymbol{t}]$ sei konstant. Damit ergibt sich die zeitlich veränderliche Raketenmasse $\boldsymbol{m}[\boldsymbol{t}]$:

Raketenmasse = DSolve[{$m\,'[t] == -M$, $m[0] ==$ m0}, $m[t]$, t] // Flatten

$\{m[t] \to \mathrm{m0} - M\ t\}$

Dadurch:

Raketengleichung[3] = Raketengleichung[2] /. {$m\,'[t] \to -M$} /. Raketenmasse

$$v'[t] == -g + \frac{M\ v_{\mathrm{rel}}}{\mathrm{m0} - M\ t}$$

■ 5.2.1.4. Raketengleichung nach Ziolkowski

Integration über $d\boldsymbol{t}$:

Raketenergebnis[1] =
Solve$\left[\int_0^t \#\, dt\ \&\ \text{/@ Raketengleichung[3]}, v[t]\right]$ /. $\left\{\text{a\_ Log[b\_]} - \text{a\_ Log[c\_]} :\to a\,\mathrm{Log}\left[\frac{b}{c}\right]\right\}$ // Flatten // Simplify

$$\left\{v[t] \to -g\ t + \mathrm{Log}\left[\frac{\mathrm{m0}}{\mathrm{m0} - M\ t}\right] v_{\mathrm{rel}} + v[0]\right\}$$

Dies ist Raketengleichung von Ziolkowski (vgl. [HMS2004], Formel (2-60), Seite 46).

Probe:

Raketengleichung[3] /. {$v_{\mathrm{rel}} \to$ vrel, $v \to$ Function @@ {{t}, $v[t]$ /. Raketenergebnis[1] /. $v_{\mathrm{rel}} \to$ vrel}}

True

■ 5.2.1.5. Steighöhe

Weitere Integration über $d\boldsymbol{t}$ ergibt Steighöhe $\boldsymbol{s}[\boldsymbol{t}]$:

Raketenergebnis[2] = Simplify$\left[\int_0^t \text{Evaluate}[v[t] \text{ /. Raketenergebnis[1]}]\, dt\right]$ /.
$\left\{\text{a\_ Log[b\_]} + \text{c\_ Log[d\_]} :\to a\,\mathrm{Log}\left[\frac{b}{d}\right] \text{ /; Simplify}[a + c == 0]\right\}$

Integrate::gener : Unable to check convergence

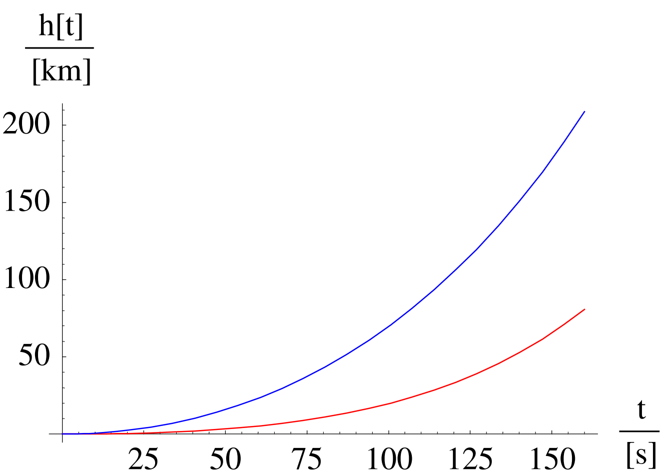
$$-\frac{g\ t^2}{2} + \frac{\left(M\ t - \mathrm{m0}\,\mathrm{Log}\left[\frac{\mathrm{m0}}{\mathrm{m0}-M\ t}\right] + M\ t\,\mathrm{Log}\left[\frac{\mathrm{m0}}{\mathrm{m0}-M\ t}\right]\right) v_{\mathrm{rel}}}{M} + t\ v[0]$$

■ 5.2.1.6. Schaubild

Vergleich mit und ohne Ortsfaktor $\boldsymbol{g}$ ergibt:

$$\mathbf{\$DefaultFont = \{"Times", 12.\};}$$
$$\frac{\text{Raketenergebnis[2]}}{1000\,\text{"m"}}\ /.\ \{g \to \#\}\ \&\ /@\ \{g, 0\}\ /.$$
$$\left\{M \to 13\,\frac{\text{"t"}}{\text{"s"}},\ \text{m0} \to 2900\,\text{"t"},\ g \to 10\,\frac{\text{"m"}}{\text{"s"}^2},\ v_{\text{rel}} \to 2600\,\frac{\text{"m"}}{\text{"s"}},\ t \to t\,\text{"s"},\ v[0] \to 0\right\}\ //\ \text{Simplify}$$
$$\text{Plot}\Big[\text{Evaluate}[\%],\ \{t, 0, 160\},\ \text{PlotStyle} \to \Big(\text{Hue}\Big[\frac{2\,\# - 2}{3}\Big]\ \&\ /@\ \text{Range}[3]\Big),$$
$$\text{AxesLabel} \to \Big\{\text{"}\frac{t}{[s]}\text{"},\ \text{"}\frac{h[t]}{[\text{km}]}\text{"}\Big\}\Big];$$

$$\left\{-\frac{1}{200}\,(-520 + t)\,t + \left(-580 + \frac{13\,t}{5}\right)\text{Log}\Big[\frac{2900}{2900 - 13\,t}\Big],\ \frac{1}{5}\left(13\,t + (-2900 + 13\,t)\,\text{Log}\Big[\frac{2900}{2900 - 13\,t}\Big]\right)\right\}$$



Illustration, dass ohne Fallbeschleunigung geringerer Schub nötig, denn **200 km** in **160** ***s*** ist zu schnell. Beschleunigung der Astronauten beim Start: gerade noch vom Organismus verkraftet.

■ 5.2.1.7. Fliegende Zigarre

Startgeschwindigkeit ***v*****[0]** liefert entscheidenden Beitrag in

Raketenergebnis[2] // ExpandAll

$$-\frac{g\,t^2}{2} + t\,v_{\text{rel}} - \frac{\text{m0}\,\text{Log}\big[\frac{\text{m0}}{\text{m0}-M\,t}\big]\,v_{\text{rel}}}{M} + t\,\text{Log}\Big[\frac{\text{m0}}{\text{m0} - M\,t}\Big]\,v_{\text{rel}} + t\,v[0]$$

Deshalb inzwischen (2004) Rakete für Privatleute gebaut und getestet, die mit Düsenflugzeug auf Startgeschwindigkeit ***v*****[0]** in grosser Höhe gebracht wird. Dadurch erheblich weniger Gewicht als bei Mondrakete Saturn V, Reichweite auch geringer.

Spitzname "fliegende Zigarre" wegen eigenartiger Form der Rakete.

■ 5.2.2. Fallzeit einer Kugel

■ 5.2.2.1. Fallzeit

Freier Fall aus Höhe $\boldsymbol{h_n}$:

$$\textbf{Solve}\left[h_n == \frac{g\, t_n^2}{2}, t_n\right]$$

Fallzeit = {RuleDelayed @@ {$t_{n\_}$, t_n /. Last[%]}}

$$\left\{\left\{t_n \to -\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{h_n}}{\sqrt{g}}\right\}, \left\{t_n \to \frac{\sqrt{2}\,\sqrt{h_n}}{\sqrt{g}}\right\}\right\}$$

$$\left\{t_{n\_} :\to \frac{\sqrt{2}\,\sqrt{h_n}}{\sqrt{g}}\right\}$$

■ 5.2.2.2. Differenzengleichung

Reduktion der Fallhöhe aus folgender *Differenzengleichung*:

Differenzengleichung = $h_{n+1} == f\, h_n$

$h_{1+n} == f\, h_n$

Gewöhnliche homogene Differenzengleichung erster Ordnung (vgl. Zinsgleichung).

Lösung durch Verhältnisbildung mit Ergänzung des Exponenten:

$$\frac{h_{n+1}}{h_n} == f^{1+n-n} \tag{5.13}$$

Also folgt *Hauptlösung*:

Hauptlösung = {$h_{n\_} :\to h_0\, f^n$}

$\{h_{n\_} :\to h_0\, f^n\}$

Probe (Teil 1):

Differenzengleichung /. Hauptlösung

True

Probe (Teil 2): Hauptlösung: möglichst wenig Periodizität:

$DefaultFont = {"Times", 12.};

$$\text{Plot}\Big[\text{Evaluate}\Big[\frac{h_n}{\text{"m"}}\ \text{/. Hauptlösung /.}\ \{h_0 \to 1\,\text{"m"},\ f \to \frac{1}{2}\}\Big],$$
$$\{n, 0, 10\},\ \text{PlotStyle} \to \text{Hue}[0],\ \text{AxesLabel} \to \Big\{\text{"}\frac{n}{[\,]}\text{"},\ \text{"}\frac{h_n}{[m]}\text{"}\Big\}\Big];$$

Merke:

Allgemeine Lösung einer linearen Differenzengleichung
ist Hauptlösung mal beliebige Periodizität.

Also hier mit $P[n+1] == P[n]$:

Lösung[allgemein] = {RuleDelayed @@ {$h_{n\_}$, h_n (1 + $P[n]$) /. Hauptlösung}}
Periode[allgemein] = {$P[n$ + _Integer] :→ $P[n]$}

$\{h_{n\_} :\to f^n\,(1 + P[n])\,h_0\}$

$\{P[n + \text{\_Integer}] :\to P[n]\}$

Differenzengleichung /. Lösung[allgemein]
% /. Periode[allgemein]

$f^{1+n}\,(1 + P[1+n])\,h_0 == f^{1+n}\,(1 + P[n])\,h_0$

True

Auch Differenzengleichungen der Zinsrechnung nur mit Hauptlösung sinnvoll!

■ 5.2.2.3. Gesamtzeit

Nun ist Fallzeit bekannt:

Fallzeit /. Hauptlösung

$$\Big\{t_{n\_} :\to \frac{\sqrt{2}\,\sqrt{h_0\,f^n}}{\sqrt{g}}\Big\}$$

Erste Fallzeit gesondert betrachten, danach Zeit zwischen zwei Stössen: $2\,t_n$.

Die Summe von N Stössen ergibt:

$$\text{Gesamtzeit[Formel]} = t_0 + \sum_{n=1}^{N} \text{Evaluate}[2\,t_n\ \text{/. Fallzeit /. Hauptlösung}]$$

$$t_0 + \sum_{n=1}^{N} \frac{2\sqrt{2}\,\sqrt{f^n\,h_0}}{\sqrt{g}}$$

■ 5.2.2.4. Geometrische Reihe

Das ist *geometrische Reihe* der Art:

$$\sum_{n=0}^{N} a^n\, b^{N-n} \text{ // PowerExpand // Simplify}$$

$$\frac{a^{1+N} - b^{1+N}}{a-b}$$

Motivation durch folgende *Teleskopsumme*:

$$(a-b)\sum_{n=0}^{N} a^n\, b^{N-n} == \sum_{n=0}^{N} a^{n+1}\, b^{N-n} - \sum_{n=0}^{N} a^n\, b^{N-n+1}$$

Indexverschiebung $\mu \to n+1$ in erster Summe:

$$== a^{N+1} + \sum_{\mu=1}^{N} a^{\mu}\, b^{N-\mu+1} - \sum_{n=1}^{N} a^n\, b^{N-n+1} - b^{N+1}$$

Indexverschiebung $\mu \to n$ bestätigt Teleskopsumme:

$$(a-b)\sum_{n=0}^{N} a^n\, b^{N-n} == a^{N+1} - b^{N+1} \tag{5.14}$$

Spezialfall $a \to q$, $b \to 1$:

$$(1 + q + q^2 + \cdots q^n)\,(1-q) == 1 - q^{n+1} \tag{5.15}$$

Grenzübergang $q^n \to 0$ für $n \to \infty$ und $|q| < 1$.

Auch bei Zinsrechnung gibt es geometrische Reihen!

■ 5.2.2.5. Unendliche Reihe berechnen

Reihe muss bei $n == 0$ beginnen, also die erste Fallzeit von der Summe abziehen:

$$\text{Gesamtzeit[Rechnen] = Gesamtzeit[Formel] = } \sum_{n=0}^{N} \text{Evaluate}[2\, t_n \text{ /. Fallzeit /. Hauptlösung}] - t_0$$

$$-t_0 + \sum_{n=0}^{N} \frac{2\sqrt{2}\,\sqrt{f^n\, h_0}}{\sqrt{g}}$$

Jetzt Anwendung der geometrischen Reihe:

Gesamtzeit[Summe] = Gesamtzeit[Rechnen] /. Fallzeit // PowerExpand

$$-\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{h_0}}{\sqrt{g}}+\frac{2\,\sqrt{2}\,\left(-1+f^{\frac{1}{2}+\frac{N}{2}}\right)\sqrt{h_0}}{\left(-1+\sqrt{f}\right)\sqrt{g}}$$

Grenzübergang $N\to\infty$ für $|f|<1$:

Gesamtzeit[Reihe] = Gesamtzeit[Summe] /. $\{f^{\frac{1}{2}+\frac{N}{2}}\to 0\}$
% // Simplify

$$-\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{h_0}}{\sqrt{g}}-\frac{2\,\sqrt{2}\,\sqrt{h_0}}{\left(-1+\sqrt{f}\right)\sqrt{g}}$$

$$-\frac{\sqrt{2}\,\left(1+\sqrt{f}\right)\sqrt{h_0}}{\left(-1+\sqrt{f}\right)\sqrt{g}}$$

Für $f == 1$ (Totalreflexion) dauert der Vorgang unendlich lange.

■ 5.2.2.6. Bestimmung von $\frac{h_{n+1}}{h_n} == f$

Praxis: Gesamtzeit t messen, f und ϵ ausrechnen:

Solve[t_∞ == Gesamtzeit[Reihe], f] // Flatten // Simplify
Limit[f /. %, $t_\infty\to\infty$]
%% /. Flatten[Solve[$\frac{g\,t_0^2}{2}$ == h_0, h_0]] // PowerExpand // Simplify

$$\left\{f\to\frac{4\,h_0^2-8\,\sqrt{2}\,\sqrt{g}\,h_0^{3/2}\,t_\infty+12\,g\,h_0\,t_\infty^2-4\,\sqrt{2}\,g^{3/2}\,\sqrt{h_0}\,t_\infty^3+g^2\,t_\infty^4}{(-2\,h_0+g\,t_\infty^2)^2}\right\}$$

1

$$\left\{f\to\frac{(t_0-t_\infty)^2}{(t_0+t_\infty)^2}\right\}$$

■ 5.2.2.7. Zusammenhang zwischen f und ϵ:

Energiesatz:

Geschwindigkeit = {RuleDelayed @@ {$v_{n\_}$, v_n /. Solve[$\frac{m\,v_n^2}{2}$ == $m\,g\,h_n$, v_n] // Flatten // Last}}

$$\left\{v_{n\_}:\!\to\sqrt{2}\,\sqrt{g}\,\sqrt{h_n}\right\}$$

Stossgesetz:

Map[Abs, Solve[v_{n+1} == $u + \epsilon\,(u - v_n)$ /. {$u \to 0$}, ϵ] // Flatten, {2}] /. {Abs[ϵ_] → ϵ}
% /. Geschwindigkeit

$\left\{\epsilon \to \frac{v_{1+n}}{v_n}\right\}$

$\left\{\epsilon \to \frac{\sqrt{h_{1+n}}}{\sqrt{h_n}}\right\}$

Wegen

Differenzengleichung

$h_{1+n} == f\, h_n$

gilt: $f == \epsilon^2$

▪ 5.2.2.8. Zusammenfassung

Mit $f == \epsilon^2$ folgt also:

$$\epsilon == \frac{t_\infty - t_0}{t_\infty + t_0} \tag{5.16}$$

$$t_\infty == t_0 \left(\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}\right) \tag{5.17}$$

▪ 5.3. Protokoll

Die Version von *Mathematica* lautet:

{$Version, $ReleaseNumber, $LicenseID}

{Microsoft Windows 3.0 (October 6, 1996), 0, 0}

Die Berechnungszeit betrug (in Sekunden):

TimeUsed[]

9.

Literatur

[HMS2004]
Hering E., Martin R., Stohrer M. *Physik für Ingenieure*, Springer-Verlag Berlin etc., 9. Auflage, (2004)

[Stö1998]
Stöcker H., *Taschenbuch der Physik*, Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main, 3. überarbeitete und erweiterte Auflage, (1998)