Analytische Theorie der Wahrscheinlichkeit*

Pierre Simon de Laplace†, Almut Maria Oswald‡, Norbert Südland§

18. Mai 2019

Zusammenfassung

Das zentrale Kapitel der über 500 Seiten starken Originalabhandlung [1814Lapl] findet sich im 2. Buch, Kapitel 3, so dass von dessen Beginn eine Übersetzung für alle Interessierten erstellt und kommentiert wird. Das Futur wird hier auf das im Deutschen übliche Präsens gesetzt, so wie es die Rückübersetzung aus einer hebräischen Übersetzung erwarten ließe. Der Leser soll auch mit der Übersetzung einen echten Eindruck vom ursprünglichen Text erhalten. Zu Zitatzwecken werden deshalb die originalen Seitenzahlen im fortlaufenden Text berücksichtigt, hier am nächsten Satzende platziert. Die Anmerkungen in den Fußnoten dienen zur nachträglichen Erläuterung des mathematischen Inhaltes.

[Seite 275]

3 Die Gesetze der Wahrscheinlichkeit, die aus der unendlichen Wiederholung von Ereignissen folgen.

16. In dem Maße, wie sich die Ereignisse vervielfältigen, entwickelt sich ihre jeweilige Wahrscheinlichkeit mehr und mehr: Ihre durchschnittlichen Ergebnisse sowie ihr Gewinn oder ihr Verlust, der von ihnen abhängt, streben nach Grenzwerten, denen sie sich mit stets zunehmender Wahrscheinlichkeit annähern. Die Bestimmung dieser Annäherung und dieser Grenzwerte ist einer der interessantesten und feinsten Teile der Zufallsanalyse.

Betrachten wir zuerst, wie sich die Wahrscheinlichkeit von zwei einfachen Ereignissen entwickelt, von denen jeweils eines bei jedem Wurf eintreffen muss, wenn man die Anzahl der Würfe vervielfältigt. Es ist offenkundig, dass dasjenige Ereignis, dessen Möglichkeit größer ist, wahrscheinlich häufiger eintreten muss in einer vorgegebenen Anzahl von Würfen; und man sollte natürlich meinen, dass jedes dieser Ereignisse proportional zu seiner Möglichkeit eintritt, wenn man die Würfe in sehr großer Anzahl wiederholt, was man dann durch die Erfahrung belegen kann. Wir beweisen diesen wichtigen Lehrsatz analytisch.

*Originaltitel: *Théorie analytique des probabilités*

†1749–1827, französischer Mathematiker, Astronom und Philosoph

‡Übersetzung aus dem französichen Original

§Anmerkungen zum mathematischen Inhalt, Otto–Schott–Straße 16, D–73431 Aalen, Deutschland

Wir haben unter Nr. 6 gesehen, dass wenn p und $1-p$ die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten der beiden Ereignisse a und b sind, die Wahrscheinlichkeit von $x + x'$ Würfen, dass das Ereignis a x-mal und das Ereignis b x'-mal eintreffen wird, gleich ist:

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (x+x')}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots x \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots x'} \cdot p^x \cdot (1-p)^{x'} \; ; \tag{1}$$

dies ist der $(x'+1)$-te Summand des Binomes $[p+(1-p)]^{x+x'}$. Betrachten wir nun den größten dieser Summanden, den wir als k bezeichnen. Der vorhergehende Summand sei $\frac{k \cdot p}{1-p} \cdot \frac{x'}{x+1}$ und der nachfolgende Summand $k \cdot \frac{1-p}{p} \cdot \frac{x}{x'+1}$.

[Seite 276]

Damit k der größere Summand ist, ist es zwingend erforderlich, dazu gleichzeitig anzusetzen[1]:

$$\frac{p}{1-p} < \frac{x+1}{x'} > \frac{x}{x'+1} \; ; \tag{2}$$

daraus kann leicht gefolgert werden, dass man mit $x + x' = n$ erhält[2]:

$$x < (n+1) \cdot p > (n+1) \cdot p - 1 \; ; \tag{3}$$

daher ist x die größte ganze Zahl, die in $(n+1) \cdot p$ enthalten ist; was folglich ergibt[3]:

$$x = (n+1) \cdot p - s \, , \tag{4}$$

woraus folgt:

$$p = \frac{x+s}{n+1} \, , \qquad 1 - p = \frac{x'+1-s}{n+1} \, , \qquad \frac{p}{1-p} = \frac{x+s}{x'+1-s} \; ; \tag{5}$$

s soll kleiner sein als Eins. Wenn x und x' riesige Zahlen sind, so wird man in extrem guter Näherung erhalten:

$$\frac{p}{1-p} = \frac{x}{x'} \; ; \tag{6}$$

das heißt, dass die Exponenten von p und von $1-p$ im größeren Ausdruck des Binoms einander stark angenähert sind im Verhältnis der Häufigkeiten; so dass die wahrscheinlichste Kombination (die bei einer riesigen Anzahl n von Würfen eintreten kann) von allen diejenige ist, derzufolge jedes Ereignis proportional zu seiner Wahrscheinlichkeit auftritt.

Der l-te Ausdruck nach dem größten lautet:

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (x-l) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (x'+l)} \cdot p^{x-l} \, (1-p)^{x'+l} \, . \tag{7}$$

Gemäß der Nr. 32 im ersten Buch gilt[4]:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n^{n+\frac{1}{2}} \cdot c^{-n} \cdot \sqrt{2\,\pi} \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{12 \cdot n} + \text{usw.} \right\} \; ; \tag{8}$$

[1]heutige Schreibweise: $\frac{x}{x'+1} < \frac{p}{1-p} < \frac{x+1}{x'}$

[2]heutige Schreibweise: $(n+1) \cdot p - 1 < x < (n+1) \cdot p$

[3]Der Erwartungswert $x = n \cdot \frac{x}{x+x'} = n \cdot p$ wird hier ganzzahlig gerundet.

[4]Laplace nähert $\mathrm{e}^x \approx 1 + x$, konsequenter ist nach [1910Mel], Gleichung (120), Seite 335:
$\ln \Gamma(n+1) = -C\,n - \frac{1}{2\,\pi\,\mathrm{i}} \int_{\frac{3}{2}-\mathrm{i}\,\infty}^{\frac{3}{2}+\mathrm{i}\,\infty} \frac{\pi}{\sin(\pi\,z)}\, \zeta(z)\, \frac{n^z}{z}\, \mathrm{d}z = -C\,n + \sum_{\mu=1}^{-\infty} \mathrm{res}_{z\to\mu} \left(\Gamma(-z)\,\Gamma(z)\,\zeta(z)\,n^z\right) =$
$-\,C\,n + (n\,\ln(n) - n + C\,n) + \left(\frac{1}{2}\,\ln(2\,\pi\,n)\right) + \left(\frac{1}{12\,n}\right) + \ldots = \left(n + \frac{1}{2}\right)\,\ln(n) - n + \frac{1}{2}\,\ln(2\,\pi) + \frac{1}{12\,n} + \ldots,$
so dass folgt: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n! = \Gamma(n+1) = \sqrt{2\,\pi\,n}\,\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \mathrm{e}^{\frac{1}{12\,n}} \cdots = n^{n+\frac{1}{2}} \cdot \mathrm{e}^{-n} \cdot \sqrt{2\,\pi} \cdot \mathrm{e}^{\left(\frac{1}{12\,n} + \ldots\right)}$.

woraus folgt[5]:

[Seite 277]

$$\frac{1}{1\,\cdot\,2\,\cdot\,3\,\cdots\,(x-l)} \;=\; (x-l)^{l-x-\frac{1}{2}}\;\cdot\;\frac{c^{x-l}}{\sqrt{2\,\pi}}\;\cdot\;\left\{1-\frac{1}{12\,\cdot\,(x-l)}\;-\;\text{usw.}\right\}, \tag{9}$$

$$\frac{1}{1\,\cdot\,2\,\cdot\,3\,\cdots\,(x'+l)} \;=\; (x'+l)^{-x'-l-\frac{1}{2}}\;\cdot\;\frac{c^{x'+l}}{\sqrt{2\,\pi}}\;\cdot\;\left\{1-\frac{1}{12\,\cdot\,(x'+l)}\;-\;\text{usw.}\right\}. \tag{10}$$

Wir entwickeln nun den Term $(x-l)^{l-x-\frac{1}{2}}$. Sein hyperbolischer Logarithmus lautet:

$$\left(l-x-\frac{1}{2}\right)\;\cdot\;\left[\log x+\log\left(1-\frac{l}{x}\right)\right]\;; \tag{11}$$

nun aber gilt:

$$\log\left(1-\frac{l}{x}\right) \;=\; -\frac{l}{x}-\frac{l^2}{2\,x^2}-\frac{l^3}{3\,x^3}-\frac{l^4}{4\,x^4}-\text{usw.}\,; \tag{12}$$

wir vernachlässigen die Menge der Ordnung $\frac{1}{n}$, und wir nehmen an, dass l^2 die Ordnung n gar nicht übertrifft; dadurch kann man die Terme der Ordnung $\frac{l^4}{x^3}$ vernachlässigen, weil x und x' der Ordnung n angehören. Also erhält man:

$$\begin{aligned}&\left(l-x-\frac{1}{2}\right)\;\cdot\;\left[\log x+\log\left(1-\frac{l}{x}\right)\right]\\ =\;&\left(l-x-\frac{1}{2}\right)\;\cdot\;\log x\;+\;l\;+\;\frac{l}{2\,x}\;-\;\frac{l^2}{2\,x}\;-\;\frac{l^3}{6\,x^2}\,;\end{aligned} \tag{13}$$

welches beim Einsetzen der Logarithmen auf die Zahlen die folgende Formel ergibt[6]:

$$(x-l)^{l-x-\frac{1}{2}} \;=\; c^{l-\frac{l^2}{2\,x}}\;\cdot\;x^{l-x-\frac{1}{2}}\;\cdot\;\left(1+\frac{l}{2\,x}-\frac{l^3}{6\,x^2}\right)\;; \tag{14}$$

man erhält gleichermaßen[7]:

$$(x'+l)^{-l-x'-\frac{1}{2}} \;=\; c^{-l-\frac{l^2}{2\,x'}}\;\cdot\;x'^{-l-x'-\frac{1}{2}}\;\cdot\;\left(1-\frac{l}{2x'}+\frac{l^3}{6\,x'^2}\right)\,. \tag{15}$$

Durch das, was vorausgeht, nämlich $p=\frac{x+s}{n+1}$, ergibt sich, dass s kleiner als Eins ist; indem man also $p=\frac{x-z}{n}$ setzt, liegt z zwischen den Grenzen $\frac{x}{n+1}$ und $-\frac{n-x}{n+1}$, und ist folglich kleiner als Eins, vom Vorzeichen abgesehen. Der Wert von p ergibt $1-p=\frac{x'+z}{n}$;

[Seite 278]

[5] heutige Korrekturen:

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(x-l)} \;=\; (x-l)^{l-x-\frac{1}{2}}\;\cdot\;\frac{\mathrm{e}^{x-l}}{\sqrt{2\,\pi}}\;\cdot\;\mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{12\,\cdot\,(x-l)}-\cdots\right)}$$

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 2\cdots(x'+l)} \;=\; (x'+l)^{-x'-l-\frac{1}{2}}\;\cdot\;\frac{\mathrm{e}^{x'+l}}{\sqrt{2\,\pi}}\;\cdot\;\mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{12\,\cdot\,(x'+l)}-\cdots\right)}$$

[6] heutige Korrektur: $(x-l)^{l-x-\frac{1}{2}} \;=\; \mathrm{e}^{l-\frac{l^2}{2\,x}}\;\cdot\;x^{l-x-\frac{1}{2}}\;\cdot\;\mathrm{e}^{\left(\frac{l}{2\,x}-\frac{l^3}{6\,x^2}\right)}$

[7] heutige Korrektur: $(x'+l)^{-l-x'-\frac{1}{2}} \;=\; \mathrm{e}^{-l-\frac{l^2}{2\,x'}}\;\cdot\;(x')^{-l-x'-\frac{1}{2}}\;\cdot\;\mathrm{e}^{\left(-\frac{l}{2x'}+\frac{l^3}{6\,(x')^2}\right)}$

also erhält man durch die vorhergehende Untersuchung[8]:

$$p^{x-l} \cdot (1-p)^{x'+l} = \frac{x^{x-l} \cdot x'^{x'+l}}{n^n} \cdot \left(1 + \frac{n\,z \cdot l}{x\,x'}\right); \tag{16}$$

woraus folgt[9]:

$$\begin{aligned} &\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (x-l) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (x'+l)} \cdot p^{x-l} \cdot (1-p)^{x'+l} \\ &= \frac{\sqrt{n} \cdot c^{-\frac{n\,l^2}{2\,x\,x'}}}{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{2\,x\,x'}} \cdot \left(1 + \frac{n\,z\,l}{x\,x'} + \frac{l\,(x'-x)}{2\,x\,x'} - \frac{l^3}{6\,x^2} + \frac{l^3}{6\,x'^2}\right). \end{aligned} \tag{17}$$

Man erhält den Term, der dem größeren vorausgeht, und dieser ist davon um den Abstand l entfernt, dann setzt man l in dieser Gleichung negativ; anschließend addiert man diese beiden Terme, ihre Summe beträgt[10]:

$$\frac{2 \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{2\,x\,x'}} \cdot c^{-\frac{n\,l^2}{2\,x\,x'}}. \tag{18}$$

Wählt man den darin enthaltenen Fall $l = 0$, so drückt das abschließende Integral[11]:

$$\sum \frac{2 \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{2\,x\,x'}} \cdot c^{-\frac{n\,l^2}{2\,x\,x'}}. \tag{19}$$

folglich die Summe aller Terme des Binoms[12] $[p + (1-p)]^n$ aus und liegt zwischen den beiden Termen, deren einer[13] p^{x+l} als Faktor hat, während der andere den Faktor p^{x-l} besitzt, und die folglich beide gleich weit entfernt vom größten Term[14] sind; doch muss man von dieser Summe den größten Term abziehen, der in ihr folglich zweimal[15] enthalten ist.

Um dieses endliche Integral zu erhalten, betrachten wir jetzt, gemäß Nr. 10 im ersten Buch, y als eine Funktion von l mit[16]:

$$\sum y = \frac{1}{c^{\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}l}\right)} - 1} = \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}l}\right)^{-1} - \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}l}\right)^{0} + \frac{1}{12}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}l} + \text{usw.}; \tag{20}$$

---

[8] heutige Schreibweise für $z^2 \approx 0$ ergibt: $p^{x-l} \cdot (1-p)^{x'+l} \approx \frac{x^{x-l} \cdot (x')^{x'+l}}{n^n} \cdot \left(1 + \frac{n \cdot z \cdot l}{x \cdot x'}\right)$

[9] heutige Korrektur:

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (x-l) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (x'+l)} \cdot p^{x-l} \cdot (1-p)^{x'+l} \approx \frac{\sqrt{n} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{n \cdot l^2}{2 \cdot x \cdot x'}}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot x \cdot x'}} \cdot \left(1 + \frac{n \cdot z \cdot l}{x \cdot x'}\right) \cdot \mathrm{e}^{\left(\frac{l \cdot (x'-x)}{2 \cdot x \cdot x'} - \frac{l^3}{6 \cdot x^2} + \frac{l^3}{6 \cdot x'^2}\right)}$$

[10] heutige Korrektur mit $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{x \cdot x'} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n \cdot p \cdot n \cdot (1-p)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n \cdot p \cdot (1-p)} = 0$ ergibt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{2 \cdot x \cdot x'}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{n \cdot l^2}{2 \cdot x \cdot x'}} \cdot \left[\left(1 - \frac{n \cdot z \cdot l}{x \cdot x'}\right) \mathrm{e}^{-\frac{l \cdot n \cdot (2 \cdot p - 1)}{x \cdot x'} + 0} + \left(1 + \frac{n \cdot z \cdot l}{x \cdot x'}\right) \mathrm{e}^{\frac{l \cdot n \cdot (2 \cdot p - 1)}{x \cdot x'} + 0}\right] = 0$$

[11] heutige Korrektur: $\lim_{n\to\infty} \left[\sum_{l=-x'}^{x} \frac{\sqrt{n} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{n \cdot l^2}{2 \cdot x \cdot x'}}}{\sqrt{\pi \cdot 2 \cdot x \cdot x'}} + \sum_{l=-x}^{n-x=x'} \frac{\sqrt{n} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{n \cdot l^2}{2 \cdot x \cdot x'}}}{\sqrt{\pi \cdot 2 \cdot x \cdot x'}}\right] = 2 \cdot \infty \cdot 0 = 2 \cdot 1 = 2$

[12] Es gilt für alle n: $[p + (1-p)]^n = 1^n = 1$.

[13] korrekt: $(1-p)^{x'+l}$, Symmetrie gilt nur für $p = \frac{1}{2}$ mit $x = n \cdot p = \frac{n}{2} = n \cdot (1-p) = x'$.
Laplace geht hier irrig von einer Summe aus, die im Grenzübergang $n \to \infty$ von $l = 0$ bis ∞ laufe und bemerkt seinen Fehler nicht, weil er die Leibniz–Notation nur andeutet. Durch die Spiegelung am Erwartungswert mit anschließender Addition erzwingt er eine Symmetrie, die sonst vor allem für den Grenzwert Null besteht.

[14] Das Maximum wird hier im Grenzübergang $n \to \infty$ zu Null.

[15] Nicht nur der größte Term, die gesamte Summe ist verdoppelt.

[16] heutige Korrektur: $\sum_{l=-x}^{n-x=x'} y(l) \neq \frac{1}{\mathrm{e}^{\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}l}\right)} - 1} = \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}l}\right)^{-1} - \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}l}\right)^{0} + \frac{1}{12}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}l} + \text{usw.}$

woher man durch die selbe Nummer ableiten kann[17]:

$$\sum y \,=\, \int y\,\mathrm{d}l \,-\, \frac{1}{2}\,y \,+\, \frac{1}{12}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}l} \,+\, \text{usw.} \,+\, \text{Konstante}\,. \tag{21}$$

[Seite 279]

Indem man y hier gleichsetzt mit[18] $\frac{2\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{2\,x\,x'}}\,\cdot\,c^{-\frac{n\,l^2}{2\,x\,x'}}$, nehmen die nachfolgenden Differentiale von y den Faktor $\frac{n\,l}{2\,x\,x'}$ und seine Fähigkeiten an; also vorausgesetzt, dass l nicht größer sein kann als die Ordnung $\sqrt{n}$, ist dieser Faktor von der Ordnung $\frac{1}{\sqrt{n}}$, und folglich verringern sich seine Differentiale immer mehr, geteilt durch die zugehörigen Potenzen von $\mathrm{d}l$; indem man demnach die Terme der Ordnung $\frac{1}{n}$ vernachlässigt, so wie man es schon im Vorausgehenden getan hat, erhält man[19]:

$$\sum y \,=\, \int y\,\mathrm{d}l \,-\, \frac{1}{2}\,y \,+\, \frac{1}{2}\,Y\,, \tag{22}$$

indem man mit l die beiden bestimmten und unendlich kleinen Integrale beginnt und mit Y den größten Term des Binoms bezeichnet[20].

Die Summe aller Terme des Binoms[21] $[p\,+\,(1\,-\,p)]^n$, die zwischen den beiden gleich weit zum größten Term der Zahl l entfernten Terme enthalten sind, gleichgesetzt mit[22] $\sum y\,-\,\frac{1}{2}\,Y$, ergibt[23]:

$$\int y\,\mathrm{d}l \,-\, \frac{1}{2}\,y\,; \tag{23}$$

und wenn man die Summe dieser beiden äußersten Terme[24] hier hinzu addiert, so erhält man als Summe aller dieser Terme[25]:

$$\int y\,\mathrm{d}l \,+\, \frac{1}{2}\,y\,. \tag{24}$$

Wenn man setzt:

$$t \,=\, \frac{l\,\sqrt{n}}{\sqrt{2\,x\,x'}}\,, \tag{25}$$

so ergibt diese Summe[26]:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\cdot\,\int \mathrm{d}t\,\cdot\,c^{-t^2} \,+\, \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}\,\cdot\,\sqrt{2\,x\,x'}}\,\cdot\,c^{-t^2}\,\cdot\,(0)\,. \tag{26}$$

[17] Hier führt Laplace vor, dass er das Leibniz–Kalkül der Differentialrechnung nicht verinnerlicht hat. Heutige Korrektur: $\sum_{l\,=\,-x}^{n\,-\,x\,=\,x'}\,y(l)\,\rightarrow\,\int_{-\infty}^{\infty} y(l)\,\mathrm{d}l\,\neq\,\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}y}\,-\,\frac{1}{2}\,+\,\frac{1}{12}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}l}\,+\,\text{usw.}$

[18] heutige Korrektur: $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\,\pi\,x\,x'}}\,\cdot\,\mathrm{e}^{-\frac{n\,l^2}{2\,x\,x'}}$

[19] heutige Korrektur: $\sum_{l\,=\,-x}^{n\,-\,x\,=\,x'}\,y(l)\,\rightarrow\,\int_{-\infty}^{\infty} y(l)\,\mathrm{d}l\,=\,1$

[20] heutige Korrektur: das bestimmte und unendlich kleine Integral bestimmt

[21] Es gilt für alle n: $1^n\,=\,\mathrm{e}^{n\,\ln(1)}\,=\,\mathrm{e}^0\,=\,1$.

[22] heutige Korrektur: $\sum_{l\,=\,-x}^{n\,-\,x\,=\,x'}\,y(l)$

[23] heutige Korrektur: $\int_{-\infty}^{\infty} y(l)\,\mathrm{d}l$

[24] Diese sind so gut wie Null.

[25] heutige Korrektur: $\int_{-\infty}^{\infty} y(l)\,\mathrm{d}l$

[26] heutige Korrektur: $\int_{-\infty}^{\infty}\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\pi}}\,=\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\int_0^{\infty}\,\mathrm{e}^{-u}\,\frac{\mathrm{d}u}{2\,\sqrt{u}}\,=\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\,=\,\sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)}{\pi}}\,=\,\frac{1}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}}\,=\,1$

Vorausgesetzt, dass die Terme, die man hiervon[27] vernachlässigt hat, der Ordnung $\frac{1}{n}$ angehören, so wird dieser Ausdruck um so viel genauer[28], wie n erhöht wird: Er gilt streng, wenn n unendlich ist[29]. Durch die vorausgehende Analyse sollte es einfach sein, die Terme der Ordnung $\frac{1}{n}$ und höherer Ordnungen zu berücksichtigen.

Literatur

[1814Lapl] (Pierre Simon) de Laplace: *Théorie analytique des probabilités (Analytische Theorie der Wahrscheinlichkeiten)*, Courcier, Paris, 2. Auflage, (1814), Kopie durch die Bayerische StaatsBibliothek, Münchner Digitalisierungszentrum: http://reader.digitale-sammlungen.de/de/fs1/object/display/bsb10053604_00007.html am 16.06.2017

[1910Mel] (Hjalmar) Mellin: Abriß einer einheitlichen Theorie der Gamma- und der hypergeometrischen Funktionen, *Mathematische Annalen*, **68**, (1910), 305–337

[27] das heißt, von der vorausgehenden Summe

[28] heutige Korrektur: Die Norm 1 wird unabhängig von n streng erfüllt.

[29] Für $n \to \infty$ gilt hier: $\infty \cdot 0 = 1$.