Lösung algebraischer Gleichungen

(Norbert) Südland*
Otto-Schott-Straße 16, D-73431 Aalen /Württemberg, Deutschland

Stand: 21.10.2014

Zusammenfassung

Die Verfahren zur Lösung algebraischer Gleichungen n-ten Grades werden vorgestellt, soweit sie bekannt sind.

1 Einleitung

1.1 Aufgabenstellung

Eine *algebraische Gleichung* enthält nur identische, ganzzahlige Vielfache der unbekannten Funktion x. Die identischen Vielfachen gleicher Terme werden zu *Potenztermen* zusammengefasst. Bei algebraischen Gleichungen mit nur einer unbekannten Funktion x lässt sich der *Grad* der Gleichung eindeutig als die höchste Potenz des zugehörigen *Polynoms* in x feststellen. Ein *Polynom* $P(x)$ in einer unbekannten Funktion x ist eine Summe aus Potenzen der Art:

$$P(x) \,:=\, \sum_{\mu=0}^{n} \hat{a}_\mu \, x^\mu \,=\, 0. \tag{1}$$

Die *Koeffizienten* $\hat{a}_\mu$ sind $(n+1)$ beliebige, aber feste Vorfaktoren und dürfen sogar Null sein. Der *Grad* n eines Polynoms richtet sich nach der höchten, tatsächlich vorkommenden Potenz n der Summe $P(x)$.
Unter *Lösen einer algebraischen Gleichung* versteht man die Kunst, ein Polynom der Art (1) als Produkt der Art:

$$P(x) \,:=\, b_0 \prod_{\nu=1}^{n} (x - b_\nu) \,=\, 0 \tag{2}$$

zu schreiben. Die Wandlung eines Produktes der Art (2) in eine Summe der Art (1) geschieht durch schlichtes Ausmultiplizieren und wird deshalb auch als *Proberechnung* bezeichnet.

*deutsch: Herr [(Norbert) Südland], E-Mail: Norbert.Suedland@T-Online.de

1.2 Normalformen

Ist in der Produktdarstellung (2) des Polynoms der Term $b_0 = 1$, so liegt eine *Normalform* des Polynoms vor. Durch Ausmultiplizieren gelingt die Einsicht, dass auch $\hat{a}_n = 1$ gilt. Der algebraische Übergang von der allgemeinen Polynomsumme (1) in die *Normalform* $N(x)$ geschieht durch Division von Gleichung (1) durch den Term $\hat{a}_n$. Das Produkt in Gleichung (2) wird durch eine Division durch b_0 inhaltlich nicht verändert, weshalb die n, eventuell verschiedenen *Wurzeln* b_ν einer algebraischen Gleichung auch immer auf die *Normalform* $N(x)$ des ausmultiplizierten Polynoms führen:

$$N(x) := x^n + \sum_{\mu=0}^{n-1} \frac{\hat{a}_\mu}{\hat{a}_n} x^\mu = x^n + \sum_{\mu=0}^{n-1} a_\mu x^\mu = \prod_{\nu=1}^{n} (x - b_\nu) . \tag{3}$$

Der *Grad* der algebraischen *Normalform* ist immer eindeutig n.

1.3 Reduzierte Gleichungen

Durch die Substitution $x \to y - \frac{\hat{a}_{(n-1)}}{n\,\hat{a}_n} = y - \frac{a_{(n-1)}}{n}$ erniedrigt sich die Zahl der Koeffizienten der *Normalform* um Eins:

$$R(y) := \left(y - \frac{a_{(n-1)}}{n}\right)^n + \sum_{\mu=0}^{n-1} a_\mu \left(y - \frac{a_{(n-1)}}{n}\right)^\mu = y^n + \sum_{\mu=0}^{n-2} c_\mu\, y^\mu , \tag{4}$$

da bei Anwendung des *binomischen Satzes* ([5], Abschnitt 2.2.2.1., Seite 106):

$$(a+b)^n = \sum_{\mu=0}^{n} \binom{n}{\mu} a^\mu\, b^{n-\mu} \tag{5}$$

mit $\binom{n}{1} = n$ eine Auslöschung des neuen Koeffizienten $c_{(n-1)}$ stattfindet.

1.4 Die Wurzeln von Eins

Die *Wurzeln* von Eins ergeben in der komplexen Zahlenebene eine n-Teilung des Vollwinkels und werden durch *komplexe Zahlen* mit *Betrag* Eins und entsprechender *Phase* wie folgt angegeben:

$$x^n - 1 = \prod_{\nu=1}^{n} \left(x - \mathrm{e}^{\left(\frac{2\,\pi\,\mathrm{i}\,\nu}{n}\right)}\right) . \tag{6}$$

Hierbei ist die Identität $\mathrm{e}^{(\mathrm{i}\,x)} = \text{Kosinus}[x] + \mathrm{i}\,\text{Sinus}[x]$ ([5], Abschnitt 3.4.4.2.1., Formel (3.82), Seite 514) zu verwenden, um den Realteil und den Imaginärteil der Wurzeln von Eins zu bestimmen. Für viele ungerade $n \geq 7$ und auch für viele gerade $n \geq 14$ ist dies selten analytisch nur mit Wurzeln gelungen.

1.5 Der Fundamentalsatz der Algebra

Um nun die *reduzierte Normalform* (4) als Produkt darzustellen, bedarf es folgender Einsichten:

- Eine algebraische Gleichung n-ten Grades besitzt wegen der Produktdarstellung (2) genau n eventuell verschiedene Wurzeln.

- Eine Darstellung der Art
$$x^n \;=\; \sum_{\mu=0}^{n-1} d_\mu \, x^\mu \tag{7}$$
ist stets möglich, was bedeutet, dass die Summe auf der rechten Seite von Gleichung (7) eindeutig in den n Lösungen von x sein muss, so dass die n verschiedenen *Wurzeln* von Eins in $(1^n \, |x^n|)$ bereits alle n Wurzeln der algebraischen Gleichung hervorbringen.

- Eine Darstellung, ähnlich wie Gleichung (7), mit $(n-2)$ statt $(n-1)$ auf der rechten Seite, ist wegen Gleichung (4) ebenfalls immer für ganzzahlige n möglich, wobei wieder n verschiedene *Wurzeln* von Eins aus dieser Summe gezogen werden.

- Das Polynom auf der rechten Seite von Gleichung (7) ist maximal vom Grade $(n-1)$, eventuell sogar Null. Es gibt also mit wachsendem Grad n immer mehr Spezialfälle der allgemeinen Lösung, die mit weniger Aufwand ermittelt werden können als die allgemeine Lösung. Diese Spezialfälle sind eventuell Teilmenge der allgemeinen Lösung.

- Die konstruktiven Anforderungen an eine *allgemeine Lösung* dieser Gleichungen sind sehr hoch, wenn die Zahlen $\{n, n-1, n-2\}$ jeweils teilerfremd sind, was für alle ungeraden Zahlen $n \geq 5$ der Fall ist.

- Zur Reduktion einer algebraischen Gleichung n-ten Grades sind maximal $(n-1)$ Wurzeln eines Unterpolynoms maximal $(n-1)$-ten Grades, *Resolvente* genannt, erforderlich. Da die reduzierte Normalform eines Polynoms n-ten Grades $(n-1)$ unabhängige Koeffizienten c_μ besitzt, ergeben sich maximal $(n-1)$ Bestimmungsgleichungen in maximal $(n-1)$ unbekannten Wurzeln. Das entsprechende, nichtlineare Gleichungssystem ist zu reduzieren, genauer gesagt: zu knacken!

- Die nun gemachten Überlegungen gelten für alle komplexwertigen Koeffizienten a_μ, b_ν oder c_μ, wo genau n Lösungen, auch *Wurzeln* genannt, resultieren.

Bevor ein Ansatz mit Koeffizientenvergleich überhaupt Aussicht auf Erfolg hat, ist nach einer allgemeinen Produktdarstellung der reduzierten Normalform (4) eines Polynoms n-ten Grades zu suchen.

1.6 Reduzierte Produktdarstellung

Das zu bildende Polynom n-ten Grades besteht aus n Faktoren, die folgenden Aufbau besitzen, um möglichst wenig komplexwertige Terme zu erzeugen:

- Der erste Faktor ist immer *phasenfrei* und besteht aus $(n-1)$ noch unbekannten (eventuell komplexwertigen) Summanden:

$$\left(y - \sum_{\mu=1}^{n-1} z_\mu \, \mathrm{e}^{\left(\frac{2\,\pi\,\mathrm{i}\,0}{n}\right)}\right) \;=\; \left(y - \sum_{\mu=1}^{n-1} z_\mu\right). \tag{8}$$

- Die übrigen Faktoren verwenden Vielfache der Phasenwinkel, die bei der n-Teilung des Vollwinkels entstehen, um zu erreichen, dass jeder Term z_μ durch einen beliebigen anderen Term $z_{\mu'}$ ersetzt werden kann:

$$\prod_{\nu=1}^{n-1} \left(y - \sum_{\mu=1}^{n-1} z_\mu \, \mathrm{e}^{\left(\frac{2\,\pi\,\mathrm{i}\,\mu\,\nu}{n}\right)}\right). \tag{9}$$

Damit kann die Grundstruktur der reduzierten Lösung immer in folgender Form geschrieben werden:

$$\prod_{\nu=0}^{n-1} \left(y - \sum_{\mu=1}^{n-1} z_\mu \, \mathrm{e}^{\left(\frac{2\,\pi\,\mathrm{i}\,\mu\,\nu}{n}\right)}\right) \;=\; 0\,. \tag{10}$$

Ausmultipliziert ergibt diese Produktdarstellung (10) ein reduziertes Polynom n-ten Grades in y, wobei die $(n-1)$ Wurzeln z_μ dieser Produktdarstellung (10) zunächst noch unbekannt sind. Zum Nachweis, dass das Produkt (10) auf ein reduziertes Polynom in y führt, wird der Koeffizient $c_{(n-1)}$ explizit bestimmt:

$$\begin{aligned} c_{(n-1)} \;&=\; \sum_{\nu=0}^{n-1}\sum_{\mu=1}^{n-1} z_\mu \, \mathrm{e}^{\left(\frac{2\,\pi\,\mathrm{i}\,\mu\,\nu}{n}\right)} \;=\; \sum_{\mu=1}^{n-1} z_\mu \sum_{\nu=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\left(\frac{2\,\pi\,\mathrm{i}\,\mu\,\nu}{n}\right)} \;= \\ &=\; \sum_{\mu=1}^{n-1} z_\mu \, \frac{\mathrm{e}^{(2\,\pi\,\mathrm{i}\,\mu)} - 1}{\mathrm{e}^{\left(\frac{2\,\pi\,\mathrm{i}\,\mu}{n}\right)} - 1} \;=\; \sum_{\mu=1}^{n-1} z_\mu \, \frac{1 - 1}{\mathrm{e}^{\left(\frac{2\,\pi\,\mathrm{i}\,\mu}{n}\right)} - 1} \;=\; 0\,, \end{aligned} \tag{11}$$

wobei das Ergebnis in Gleichung (11) durch Summentausch und Deutung der dadurch eingeschlossenen Summe als *endliche, geometrische Folge* ([5], Abschnitt 2.3.2., Seite 114) der Art:

$$\sum_{\mu=0}^{n-1} q^\mu \;=\; \frac{q^n - 1}{q - 1} \tag{12}$$

erhalten wird. Es gilt für ganzzahlige μ die Identität: $\mathrm{e}^{(2\,\pi\,\mathrm{i}\,\mu)} \;=\; 1$.
Somit ist Gleichung (10) die Produktdarstellung des reduzierten Polynoms (4) und als konstruktiver Existenzbeweis der prinzipiellen Lösbarkeit einer algebraischen Gleichung n-ten Grades zu werten.

1.7 Der Arkustangens

Die analytische Funktion *Arkustangens* ist gut bekannt als die Umkehrfunktion der trigonometrischen Funktion *Tangens*. Deshalb wird auch die Ableitung der Funktion *Arkustangens* in mathematischen Büchern (zum Beispiel [5], Abschnitt 1.1.3.3., Integral 40., Seite 37) gefunden:

$$\frac{\partial \mathrm{Arkustangens}[x]}{\partial x} = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\mathrm{i}\,x}+\frac{1}{1+\mathrm{i}\,x}\right). \tag{13}$$

Durch die komplexen Zahlen besteht die Möglichkeit, dass das Ergebnis von Gleichung (13) als Summe zweier Brüche geschrieben werden kann. Die Umkehrfunktion der Ableitung ist das Integral, deshalb ist nun eine alternative Darstellung des Arkustangens gefunden ([5], Abschnitt 1.1.3.3., Integral 2, Seite 35) als:

$$\frac{1}{2}\int_0^x\left(\frac{1}{1-\mathrm{i}\,x}+\frac{1}{1+\mathrm{i}\,x}\right)\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{\mathrm{Logarithmus}[1-\mathrm{i}\,x]}{\mathrm{Logarithmus}[\mathrm{e}]}-\frac{\mathrm{Logarithmus}[1+\mathrm{i}\,x]}{\mathrm{Logarithmus}[\mathrm{e}]}\right) = \frac{\mathrm{i}}{2}\,\frac{\mathrm{Logarithmus}\left[\frac{1-\mathrm{i}\,x}{1+\mathrm{i}\,x}\right]}{\mathrm{Logarithmus}[\mathrm{e}]} = \mathrm{i}\,\frac{\mathrm{Logarithmus}\left[\sqrt{\frac{1-\mathrm{i}\,x}{1+\mathrm{i}\,x}}\right]}{\mathrm{Logarithmus}[\mathrm{e}]} = \mathrm{Arkustangens}[x]\,. \tag{14}$$

Die Ableitungen sind gleich, auch mindestens 1 Punkt $\mathrm{Arkustangens}[0] = \frac{\mathrm{i}}{2}\frac{\mathrm{Logarithmus}[1]}{\mathrm{Logarithmus}[\mathrm{e}]} = 0$ ist in beiden Darstellungen gleich. Diese Formulierung (14) hilft, die Ergebnisse der Algebra und der Trigonometrie zu verstehen. Für den *natürlichen Logarithmus* gilt: $\mathrm{Logarithmus}[\mathrm{e}] = 1$.

1.8 Die n-ten Wurzeln einer Summe

Das folgende Ergebnis ist eine Hilfe zum Verständnis der Eigenschaften der n-ten Wurzeln einer Summe:

$$\mathrm{e}^{\left(\pm\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{Arkustangens}[\frac{y}{x}]}{n}\right)} = \sqrt[2\,n]{\frac{x\pm\mathrm{i}\,y}{x\mp\mathrm{i}\,y}} = \frac{\sqrt[n]{x\pm\mathrm{i}\,y}}{\sqrt[2\,n]{x^2+y^2}}\,. \tag{15}$$

Daraus folgen nun die $(n+1)$ oder n n-ten Wurzeln einer komplexwertigen Summe:

$$\sqrt[n]{x\pm\mathrm{i}\,y} = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\frac{1}{n}}\;\mathrm{e}^{\left(\pm\frac{2\,\pi\,\mathrm{i}\,\mu}{n}\pm\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{Arkustangens}[\frac{y}{x}]}{n}\right)}\qquad \mu\in\{0,1,2,\ldots,[n]\}\,. \tag{16}$$

Wenn n ganzzahlig ist, nur dann ist die Zahl der Wurzeln n, denn der Bogen 0 ist der Bogen $2\,\pi$ in der Trigonometrie. Die Funktion $[n]$ ohne Funktionsnamen ist die Klammerfunktion von (Carl Friedrich) Gauß[1], welche auf die Ganzzahl $[n]\le n$ führt.
Durch die Substitution $y\to -\mathrm{i}\,y$ werden die $(n+1)$ oder n n-ten Wurzeln einer Summe gefunden:

$$\sqrt[n]{x\pm y} = \left(\sqrt{x^2-y^2}\right)^{\frac{1}{n}}\;\mathrm{e}^{\left(\pm\frac{2\,\pi\,\mathrm{i}\,\mu}{n}\pm\frac{\mathrm{Areatangens}[\frac{y}{x}]}{n}\right)}\qquad \mu\in\{0,1,2,\ldots,[n]\}\,. \tag{17}$$

Die Funktion $\mathrm{Areatangens}[x]$ besitzt die Ableitung $\frac{1}{1-x^2}$ und eine analoge Darstellung zum Arkustangens (14), ohne $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$, nämlich $\frac{1}{2}\,\mathrm{Logarithmus}\left[\frac{1+x}{1-x}\right]$ ([5], Abschnitt 1.2.2.3., Seiten 85-86).

[1] deutsch: Herr [(Karl Friedrich) Gauß] (1777 - 1855)

2 Konkrete Lösungen

2.1 Motivation

Nun folgt nicht die allgemeine Lösung der algebraischen Gleichungen und der dazu optimierte Algorithmus, da diese dem Verfasser bislang nicht vorliegen. Vielmehr sollen diejenigen Sonderfälle algebraischer Gleichungen, deren Lösung bekannt ist, mit Herleitung vorgestellt werden. Spätere Ergänzungen durch weitere Verfasser sind somit möglich und zu begrüßen.
Algebraische Gleichungen 0-ten Grades gibt es nicht, da $x^0 = 1$ gilt und somit eine Auflösung nach x nicht mehr eindeutig ist. Algebraische Gleichungen 1-ten Grades heißen auch *lineare Gleichungen* und werdem im Rahmen der *Matrizenrechnung* in verschiedenen Lehrwerken abgehandelt. Die nichtlinearen algebraischen Gleichungen sind die algebraischen Gleichungen im engeren Sinne, um die es in dieser Abhandlung geht.

2.2 Quadratische Gleichungen

2.2.1 Geschichte

Die quadratischen Gleichungen sind algebraische Gleichungen der Art (1) oder (2), bei denen $n = 2$ gilt. Ihre Lösung liegt seit dem Altertum vor, wobei der *Satz des Pythagoras*, der für rechtwinklige Dreiecke gilt, mit $a^2 + b^2 = c^2$ einen Zusammenhang der Kantenlängen a, b und c beschreibt, der in der Baukunst eine besondere Rolle spielt. Eine besonders alte quadratische Gleichung ist zur Findung und Metrik des *goldenen Schnittes* notwendig, der ganze Architekturschulen prägte.

2.2.2 Reduzierte Gleichung

Die reduzierte quadratische Gleichung (4,10) ist bereits die *lineare Resolvente* in y^2 und besitzt nur eine unbekannte Wurzel $z = z_1$ (es gilt stets: $z_\mu^n := (z_\mu)^n$):

$$y^2 + p \;=\; (y - z_1)\,(y + z_1) \;=\; y^2 - z_1^2 \;=\; 0. \tag{18}$$

Die Lösung $y_{1,2} \to \pm z_1 = \pm\sqrt{-p}$ ist offensichtlich und bedarf keiner großen Rechenkunst, sobald das Ziehen der Quadratwurzel bekannt ist.

2.2.3 Mitternachtsformel

Im Schulunterricht wird eine *Mitternachtsformel*[2] gelehrt, welche die quadratische Gleichung $a\,x^2 + b\,x + c \;=\; 0$ vollständig und fallunterscheidungsfrei löst:

$$x_{1,2} \;=\; \frac{-b \,\pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}\,. \tag{19}$$

[2]Sie soll auch zur Mitternacht auf Anhieb parat sein!

2.3 Kubische Gleichungen

2.3.1 Geschichte

Die kubischen Gleichunegn galten ([4], Seite 112) bei (Luca) Pacioli[3] (1445 bis 1514) noch als unlösbar, obwohl sich dieser um die Algebra außerordentlich verdient gemacht hatte. Die Lösung wurde von (Scipione) del Ferro[4] (um 1465 bis 1526) und (Niccolo) Tartaglia[5] (um 1500 bis 1557) unabhängig gefunden. Erst 1539 wurde die Lösung durch Tartaglia an Geronimo Cardano[6] (1501 bis 1576) auf dessen Drängen mitgeteilt, so dass sie 1545 in seinem Lehrwerk „*ars magna*"[7] erstmals schriftlich erschien und erhalten wurde. Die Formeln heißen deshalb auch *Cardanische Formeln.*

1604 gab Johann Faulhaber[8] (1580 bis 1635) ein Buch mit 160 Aufgaben namens „*Arithmetisch Cubiccosischer Lustgarten*"[9] ([6], Abschnitt 2.3, Seite 150) heraus, wo er bereits durch den Titel bekannt gibt, dass er eine Lösung für diejenigen kubischen Gleichungen parat hat, die bis dahin als „*casus irreduzibilis*"[10] galten. Andere Quellen ([4], Seite 110) zitieren (F.) Vieta[11] um 1600 als Erfinder der trigonometrischen Deutung, mit deren Hilfe eine numerische Lösung erzeugt werden kann, die – wenn sie korrekt erraten ist – eine quadratische Probe bestehen muss, um analytisch einwandfrei zu sein.

Der Verfasser fand im Jahre 1992, dass eine numerische Lösung einer kubischen Gleichung eine quadratische Probe erfüllt, 2001 fand er eine im Unterricht verwendbare Substitution, die auf die quadratische Resolvente anstelle der reduzierten Gleichung führt, was die Rechenarbeit verringert, 2012 fand er eine Alternative zur Cardanischen Lösung. Die Theoreme zur Addition zweier dritter Wurzeln, die nur Quadratwurzeln enthalten, stehen noch aus.

2.3.2 Reduzierte Gleichung

Die reduzierte kubische Gleichung lautet:

$$y^3 + p\,y + q \;=\; 0\,. \tag{20}$$

Für den Fall $p = 0$ ergibt sich eine *lineare Resolvente* in y^3.

2.3.3 Quadratische Resolvente

Die allgemeinere *quadratische Resolvente* in z^3 folgt durch Ausmultiplizieren des Ansatzes (10) mit $n = 3$ und Koeffizientenvergleich. Es ergeben sich 2 Gleichungen in 2 noch unbekannten Wurzeln z_1 und z_2:

$$-z_1^3 - z_2^3 \;=\; q\,; \qquad -3\,z_1\,z_2 \;=\; p\,. \tag{21}$$

[3] lateinisch: Herr [(Luka) Patzioli]
[4] lateinisch: Herr [(Schipione) del Fehro]
[5] lateinisch: Herr [(Niekolo) Tartalja]
[6] lateinisch: Herr [(Scheronimo) Kardano]
[7] lateinisch: die große Kunst
[8] deutsch: Herr [(Johann) Faulhaba]
[9] deutsch: arithmetisch-kubikkosischer Lustgarten
[10] lateinisch: unlösbarer Fall
[11] lateinisch: Herr [(F.) Wieta]

Die Auflösung dieses Gleichungssystems über die Identität $z_2 \rightarrow -\frac{p}{3\,z_1}$ ergibt eine quadratische Gleichung in z_1^3:

$$z_1^6 + q\,z_1^3 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 \;=\; 0\,. \tag{22}$$

2.3.4 Lösende Substitution

Eine quadratische Resolvente in z^3 folgt auch, indem auf die Gleichung $x^3 + a\,x^2 + b\,x + c \;=\; 0$ die Substitution

$$x \rightarrow \frac{1}{3}\left(z - \frac{3\,b - a^2}{z} - a\right) \tag{23}$$

angewendet wird. Die Lösung x erhält man durch Lösen der quadratischen Gleichung und anschließende Rücksubstitution. Das Ziehen der dritten Wurzeln bewirkt dabei drei verschiedene Lösungen x der kubischen Gleichung. Für $3\,b \;=\; a^2$ folgt eine *lineare Resolvente* in z^3.

2.3.5 Halbe Arbeit

Wer glaubt, nun alle kubischen Gleichungen lösen zu können, der steht noch vor einem weiteren Problem: Die Substitution (23) zeigt, dass x einer quadratische Gleichung in z genügt, während dritte Wurzeln aus quadratischen Lösungen über beide Lösungswege folgen. Die gefundene Lösung ist zwar korrekt und bestätigt die Probe, aber unnütz kompliziert.
Die Lösungen der quadratischen Resolvente (22) lauten:

$$\left(z^3\right)_{1,2} \;=\; -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}\,. \tag{24}$$

Die Rücksubstitution $y \rightarrow z_1 + z_2 \;=\; z_1 - \frac{p}{3\,z_1} \;=\; z_2 - \frac{p}{3\,z_2}$ führt bei Vertauschen von z_1 und z_2 auf dieselbe Lösung. Die Kubikwurzeln erzeugen drei Lösungen y, die gleich sein können.
Als Restaufgabe bleibt die Suche nach einer quadratischen Lösung, die mit dem Term

$$z_{1,2} \;=\; \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \;=\; A \pm \sqrt{B} \qquad \begin{aligned} z_1 \,+\, z_2 \;&=\; 2\,A \\ z_1 \,-\, z_2 \;&=\; 2\,\sqrt{B} \end{aligned} \tag{25}$$

übereinstimmt. Sind die Terme p und q rationale Zahlen, so kann durch Quadrieren der numerischen Lösung auf die analytische Darstellung geschlossen werden. Der erratene Term muss die quadratische Probe $y = z_1 - \frac{p}{3\,z_1}$ bestehen, damit er als korrekt eingestuft werden kann.

2.3.6 Kubikkosisch

Mit der Formel (17) ergibt sich das Folgende aus der Formel (25) mit $\mu \in \{0, 1, 2\}$:

$$z_{1,2} \;=\; \frac{\sqrt{-p}}{\sqrt{3}} \left(\text{Kosinus}\left[\frac{2\,\pi\,\mu}{3}\right] \;\pm\; \mathrm{i}\,\text{Sinus}\left[\frac{2\,\pi\,\mu}{3}\right]\right)\, \mathrm{e}^{\left(\mp\frac{1}{3}\text{Areatangens}\left[\sqrt{1+\frac{4\,p^3}{27\,q^2}}\right]\right)} \tag{26}$$

Der *unlösbare Fall* $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \;<\; 0$ führt auf ein Ergebnis mit der Kosinusfunktion ([4], Seite 110):

$$y \;=\; z_1 \,+\, z_2 \;=\; 2\,\frac{\sqrt{-p}}{\sqrt{3}}\,\text{Kosinus}\left[\frac{1}{3}\left(2\,\pi\,\mu \;-\; \text{Arkuskosinus}\left[\frac{3\,q}{2\,p}\,\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-p}}\right]\right)\right] \tag{27}$$

Dieses Ergebnis (27) unterstreicht das Ergebnis *kubikkosisch* von (Johann) Faulhaber (1604).

2.3.7 Spezielles Tschebyscheff-Polynom

Für $\mu = 0$ und $p \neq 0$ ergibt sich das interessante Ergebnis:

$$Y = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-p}} \frac{z_1 + z_2}{2} = \text{Kosinus}\left[\frac{\text{Arkuskosinus}\left[\frac{3\,q}{2\,p}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-p}}\right]}{3}\right] \tag{28}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-p}} \frac{z_1 - z_2}{2\,\mathrm{i}} = \text{Sinus}\left[\frac{\text{Arkuskosinus}\left[\frac{3\,q}{2\,p}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-p}}\right]}{3}\right] \tag{29}$$

Das Ergebnis (28) besitzt die Form eines Tschebyscheffschen Polynoms ([5], Abschnitt 7.1.2.5.1., Seite 752), nun aber ist sein Grad der Bruch $\frac{1}{3}$.

2.3.8 Einheitskreis

Das Problem soll am Einheitskreis besprochen werden, weil jede Potenz von Eins Eins ist. Dies gelingt gemäß Formel (28) mit $p \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-p}} z_{1,2} &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-p}} \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{\frac{3\,q}{2\,p}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-p}} \mp \frac{3}{p}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-p}}\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} = \\
Z_{1,2} &= \sqrt[3]{X \mp \sqrt{X^2 - 1}} = \sqrt[3]{X \pm \mathrm{i}\sqrt{1 - X^2}} \\
&= \mathrm{e}^{\left(\pm\frac{\mathrm{i}}{3}\,\text{Arkustangens}\left[\frac{\sqrt{1-X^2}}{X}\right]\right)} = \mathrm{e}^{\left(\pm\frac{\mathrm{i}}{3}\,\text{Arkuskosinus}[X]\right)}, \qquad X = \frac{3\,q}{2\,p}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-p}}\,.
\end{aligned} \tag{30}$$

Nun ist nach den Formeln (17, 16) der Betrag von (30) Eins, die Phase Z besitzt nur 1 Variable X. Die Summe $\frac{Z_1+Z_2}{2}$ ist der Kosinus der Phase der Lösung der reduzierten kubischen Gleichung:

$$Y = \frac{Z_1 + Z_2}{2} = \frac{\sqrt[3]{X - \sqrt{X^2 - 1}}}{2} + \frac{\sqrt[3]{X + \sqrt{X^2 - 1}}}{2}\,. \tag{31}$$

Nach Rothe ([2], Aufgabe 13.d, Seiten 8-9) lohnt sich die 3-te Potenz des Ergebnisses (31):

$$Y^3 = \frac{(Z_1 + Z_2)^3}{8} = \frac{X + 3\,Y}{4}\,. \tag{32}$$

Nun passt die Lösung $X \to \text{Kosinus}[3\,\phi], Y \to \text{Kosinus}[\phi]$ ([5], Abschnitt 2.5.2.1.3, Seite 181). Die Rücksubstitution von X und Y führt zurück auf (20), die *reduzierte kubische Gleichung* $y^3 + p\,y + q = 0$.

2.3.9 Drittelung eines Winkels

Es muss ein Theorem zur Vereinfachung des Ergebnisses (28) geben, aber bisher wurde es *nicht* gefunden. Dieses Theorem ermöglicht die Vereinfachung von Termen, welche bei der Lösung von algebraischen Gleichungen 5-ten Grades vorkommen. Es gibt ein Verfahren zur Drittelung eines beliebigen Winkels durch Papierfalten ([7]; [8], Abschnitt 46, Seiten 91-92), also ist die Existenz des Theorems schon gezeigt. Bisher half dieses Faltverfahren nicht, die Probleme der Algebra aufzuklären, nur die Gleichung (32) folgte auch daraus.

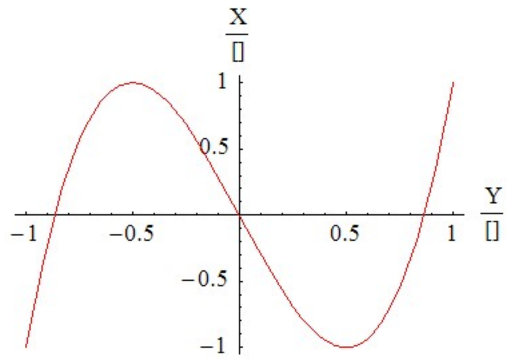

Abbildung 1: Das Tschebyscheffsche Polynom 3. Grades

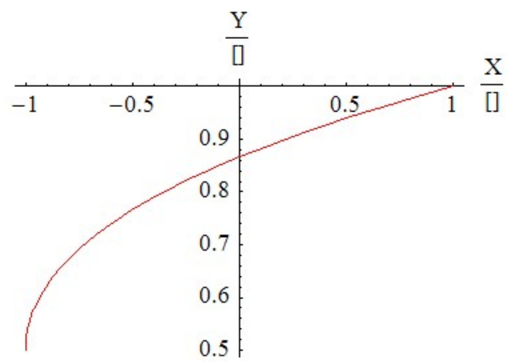

Abbildung 2: Die Faulhabersche Phasenfunktion

2.3.10 Die Faulhabersche Phasenfunktion

Die Faulhabersche Phasenfunktion $Y[X]$ besitzt eine einfache Umkehrfunktion, nämlich:

$$X[Y] \;=\; \text{Kosinus}\,[3\,\text{Arkuskosinus}[Y]] \;=\; 4\,Y^3 - 3\,Y\,. \tag{33}$$

Dieses Tschebyscheffsche Polynom 3-ten Grades hat den Verlauf aus Abbildung 1. Nun wird bei der Umkehrfunktion, der Faulhaberschen Phasenfunktion, nur der rechte Teil verwendet und hat bisher die Form:

$$Y[X] \;=\; \text{Kosinus}\left[\frac{\text{Arkuskosinus}[X]}{3}\right] \;=\; \frac{\sqrt[3]{X+\sqrt{X^2-1}} \,+\, \sqrt[3]{X-\sqrt{X^2-1}}}{2}\,. \tag{34}$$

Diese Faulhabersche Phasenfunktion hat den Verlauf aus Abbildung 2. Die allgemeine Form der Tschebyscheffschen Polynome folgt analog aus Gleichung (16) für beliebige n und X:

$$T_n[X] \;=\; \text{Kosinus}\,[n\,\text{Arkuskosinus}[X]] \;=\; \frac{\left(X+\sqrt{X^2-1}\right)^n \,+\, \left(X-\sqrt{X^2-1}\right)^n}{2}\,. \tag{35}$$

Diese Formel (35) ermöglicht Theoreme, wie $T_n[X]^2 = \frac{T_{2\,n}[X]+1}{2}$, $T_n[X]^3 = \frac{T_{3\,n}[X]+3\,T_n[X]}{4}$, oder $T_{-n}[X] = T_n[X]$, und diese Theoreme werden vielleicht die Schlüssel zur analytischen Lösung der algebraischen Gleichungen n-ten Grades sein mit $T_0[X] = 1$, $T_1[X] = T_{-1}[X] = X$, $T_{n+1}[X] = 2\,X\,T_n[X] - T_{n-1}[X]$ und so weiter.

2.3.11 Erstes Beispiel

Der *unlösbare Fall* erzeugt Probleme, die sich bei der Proberechnung lösen. So besitzt das Beispiel

$$(x-2)(x-3)(x-5) \,=\, x^3 - 10\,x^2 + 31\,x - 30 == 0 \tag{36}$$

durch die Substitution $x \to y + \frac{10}{3}$ die *reduzierte Normalform*:

$$y^3 - \frac{7}{3}\,y - \frac{20}{27} \,=\, 0\,. \tag{37}$$

Die Cardanische Formel führt auf:

$$y_1 \,=\, \sqrt[3]{\frac{10}{27} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}} + \sqrt[3]{\frac{10}{27} - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}} \,=\, \frac{5}{3}\,. \tag{38}$$

Der Betrag der Lösung (38) ist $\sqrt{-\frac{4\,p}{3}} \,=\, \frac{2\sqrt{7}}{3}$. Damit folgt die *Phase* der komplexwertigen Lösung:

$$\begin{aligned} Y_1 \;&=\; \text{Kosinus}\left[\frac{\text{Arkuskosinus}\left[\frac{10}{7\sqrt{7}}\right]}{3}\right] \,=\, \text{Kosinus}\left[\frac{\text{Arkustangens}\left[\frac{9\sqrt{3}}{10}\right]}{3}\right] \,= \\ &=\; \frac{3}{2\sqrt{7}}\left(\sqrt[3]{\frac{10}{27} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}} + \sqrt[3]{\frac{10}{27} - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}}\right) \,=\, 0.94491118252306806804\ldots\,. \end{aligned} \tag{39}$$

Der numerische Wert von $y_1 = \frac{5}{3}$ (38) muss nun die Proberechnung $y = z - \frac{p}{3\,z}$ bestehen, woraus folgt:

$$\frac{2\sqrt{7}}{3}\,Y_1 \,=\, \frac{5}{3} \,=\, z + \frac{7}{9\,z}\,, \qquad z_{1,2} \,=\, \frac{5}{6} \pm \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{6}\,, \qquad z_{1,2}^3 \,=\, \frac{10}{27} \pm \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{3}\,. \tag{40}$$

Dadurch wird die mathematische Lücke zu den analytischen 3-ten Wurzeln weiter geschlossen. Diese Methode, einen numerischen Wert zu nutzen, um analytische Ergebnisse zu erzeugen, funktioniert wegen der Proberechnung. Vielleicht findet einmal jemand eine analytische Formel, um die Cardanische Formel (25) zu vereinfachen. Das Theorem existiert, wurde aber bisher nicht gefunden.

Die Polynomdivision der reduzierten Normalform (37) durch $y - \frac{5}{3}$ ergibt $y^2 + \frac{5}{3}\,y + \frac{4}{9} = 0$ mit den Wurzeln $y_2 = -\frac{1}{3}$ und $y_3 = -\frac{4}{3}$. Die Rücksubstitution $x = y + \frac{10}{3}$ erzeugt die drei Lösungen der Gleichung (36):

$$x_1 \,=\, 5 \qquad x_2 \,=\, 3\,, \qquad x_3 \,=\, 2\,. \tag{41}$$

2.3.12 Zweites Beispiel

Die Gleichung $\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x-\sqrt{10}\right)\left(x-\sqrt{15}\right) \,=\, 0$ führt über die Cardanische Formel auf den *unlösbaren Fall*, da 3 reelle Wurzeln vorkommen. Die numerische Auswertung der Lösungsquadrate ergibt schließlich auch ohne analytisches Verfahren die 3 Lösungen $x_\nu \to \sqrt{5\,\nu}$ mit $\nu \in \{1,2,3\}$. Viele kubische Lösungen sehen also komplizierter aus, als sie es im konkreten Fall sind.

Probleme treten bei Verwendung der Funktion Arkustangens $\left[\frac{\sqrt{1-X^2}}{X}\right]$ auf, weil diese nur den Winkel in der Halbperiode findet. Der beste Weg zur Findung des numerischen Wertes von (25) mit komplexwertigen Termen ist die Verwendung der Funktion Arkustangens[x, y], um den Winkel in der ganzen Periode zu finden.

2.4 Gleichungen 4-ten Grades

2.4.1 Geschichte

Die Lösung stammt von (L.) Ferrari[12] (1522 - 1565), der Schüler und Mitarbeiter von (Geronimo) Cardano (1501 - 1576) war. Sie veröffentlichten diese 1545 in der „*ars magna*"[13]. Die Darstellung der Lösung in gängigen Handbüchern ([4], Seiten 112-113; [5], Abschnitt 2.4.2.3., Seite 133) erfolgt immer noch ohne Herleitung und mit einer Fallunterscheidung, die bei genauem Hinsehen eher heuristischer Natur ist, da sich die Lösungsformel in den verschiedenen Fällen nicht ändert. Dem Verfasser gelang 2002 die Herleitung der Cardanischen Formeln auch für die Gleichungen 4-ten Grades, damit das Selbststudium oder der Unterricht bereichert werden können. Die verschiedenen Herleitungen sollen nun vorgestellt werden. Die Substitutionen, die auf die Resolvente führen, stellen eventuell schon Neuland dar. Die Spezialfälle wurden 2012 gefunden. Dieses Kapitel wurde 2013 vollendet.

2.4.2 Reduzierte Gleichung

Die reduzierte Normalform der Gleichung 4-ten Grades lautet:

$$y^4 + p\,y^2 + q\,y + r \;=\; 0\,. \tag{42}$$

Für den Fall $p = q = 0$ liegt eine *lineare Resolvente* in y^4 vor. Der Fall $q = 0$ heißt *biquadratische Gleichung*, da eine quadratische Gleichung in y^2 vorliegt.

2.4.3 Bestimmungsgleichungen

Durch Ausmultiplizieren des Ansatzes (10) mit $n = 4$ und anschließendem Koeffizientenvergleich resultieren 3 Gleichungen in 3 noch unbekannten Wurzeln z_1, z_2 und z_3:

$$\begin{pmatrix} z_2^4 - 4\,z_1\,z_3\,z_2^2 - (z_1^2 - z_3^2)^2 & = & r \\ -4\,z_2\,(z_1^2 + z_3^2) & = & q \\ -4\,z_1\,z_3 - 2\,z_2^2 & = & p \end{pmatrix}. \tag{43}$$

2.4.4 Kubische Resolvente

Der Ansatz (10) bewirkt eine Asymmetrie in den Wurzeln z_1 bis z_3, dies ermöglicht explizite Auflösungen nach z_2:

$$\begin{pmatrix} z_2^2 & = & 2\,z_1\,z_3 \pm \sqrt{r + (z_1^2 + z_3^2)^2} \\ (z_1^2 + z_3^2) & = & -\frac{q}{4\,z_2} \\ 2\,z_1\,z_3 & = & -z_2^2 - \frac{p}{2} \end{pmatrix}. \tag{44}$$

Die größten gemeinsamen Terme werden in die erste Teilgleichung eingesetzt, wodurch nur noch 1 Gleichung in z_2 vorliegt, nämlich die *kubische Resolvente*, die nach Sortieren der Argumente und Quadrieren eindeutig wird:

$$\left(2\,z_2^2 + \frac{p}{2}\right)^2 \;=\; r + \frac{q^2}{16\,z_2^2}\,. \tag{45}$$

[12]lateinisch: Herr [(L.) Fehrari]

[13]lateinisch: die große Kunst

Die Substitution $z_2 \to \pm \frac{\sqrt{\zeta}}{2}$ führt auf die Darstellung der *kubischen Resolvente* in $\zeta = 4\, z_2^2$ ([5], Abschnitt 2.4.2.3., Seite 133):

$$\zeta^3 + 2\, p\, \zeta^2 + \left(p^2 - 4\, r\right)\, \zeta - q^2 \;=\; 0\,. \tag{46}$$

Da zur Findung der Resolvente quadriert wurde, ist eine konkrete Proberechnung bei der Wurzelziehung notwendig.

2.4.5 2 Wurzeln Null, erster Fall

Für $z_1 = z_3 = 0$ folgt $q = 0$ und $r = \frac{p^2}{4}$. Damit folgt die quadratische Gleichung $\frac{1}{4}\, \left(p + 2\, y^2\right)^2 = 0$ in y^2 mit den 4 Lösungen:

$$y_1 \;=\; -\mathrm{i}\sqrt{\frac{p}{2}}, \quad y_2 \;=\; -\mathrm{i}\sqrt{\frac{p}{2}}, \quad y_3 \;=\; \mathrm{i}\sqrt{\frac{p}{2}}, \quad y_4 \;=\; \mathrm{i}\sqrt{\frac{p}{2}}. \tag{47}$$

2.4.6 2 Wurzeln Null, zweiter Fall

$z_1 = z_2 = 0$ oder $z_2 = z_3 = 0$ führt auf $p = 0$ und $q = 0$, nur $-z^4 = r$ bleibt übrig, dies ist die *lineare Resolvente* in z^4. Die 4 Lösungen der Gleichung $y^4 + r = 0$ sind:

$$y_1 \;=\; \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\, \sqrt[4]{r}, \quad y_2 \;=\; \frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\, \sqrt[4]{r}, \quad y_3 \;=\; \frac{-1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\, \sqrt[4]{r}, \quad y_4 \;=\; \frac{-1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\, \sqrt[4]{r}. \tag{48}$$

2.4.7 1 Wurzel Null, erster Fall

$z_2 = 0$ führt auf $q = 0$ und zu der *biquadratischen Gleichung* $y^4 + p\, y^2 + r = 0$. Die Lösungen sind:

$$\begin{aligned} y_1 \;&=\; -\sqrt{\frac{-p-\sqrt{p^2-4\,r}}{2}}, \qquad & y_2 \;&=\; \sqrt{\frac{-p-\sqrt{p^2-4\,r}}{2}}, \\ y_3 \;&=\; -\sqrt{\frac{-p+\sqrt{p^2-4\,r}}{2}}, \qquad & y_4 \;&=\; \sqrt{\frac{-p+\sqrt{p^2-4\,r}}{2}}. \end{aligned} \tag{49}$$

Die biquadratische Gleichung ist für $r = \frac{p^2}{4}$ sehr einfach, es trifft nämlich der erste Fall mit 2 Wurzeln Null zu. Die Spezialfälle müssen also in der richtigen Reihenfolge geprüft werden.

2.4.8 1 Wurzel Null, zweiter Fall

$z_1 = 0$ (oder $z_3 = 0$) führt auf $z_2 = \pm\,\mathrm{i}\sqrt{\frac{p}{2}}$ und $z_3 = \pm\,\mathrm{i}\sqrt{\frac{\pm\,\mathrm{i}\,q}{2\sqrt{2\,p}}}$, dies führt auf $r = \frac{p^2}{4} + \frac{q^2}{8\,p}$, nämlich auf die Gleichung $y^4 + p\, y^2 + q\, y + \frac{p^2}{4} + \frac{q^2}{8\,p} = 0$. Nun besitzt die *kubische Resolvente* (46) die Form:

$$\zeta^3 + 2\, p\, \zeta^2 - \frac{q^2}{2\, p}\, \zeta - q^2 \;=\; 0 \;=\; \frac{\left(\zeta + 2\, p\right)\, \left(2\, p\, \zeta^2 - q^2\right)}{2\, p}\,. \tag{50}$$

Der letzte Term ergibt durch einen *scharfen Blick*, dass $\zeta = -2\, p$ eine Nullstelle der kubischen Resolvente (50) ist. Damit folgen die 3 Wurzeln der *speziellen kubischen Resolvente* (50):

$$\zeta_1 = -2\, p, \quad \zeta_2 = -\frac{q}{\sqrt{2\, p}}, \quad \zeta_3 = \frac{q}{\sqrt{2\, p}}. \tag{51}$$

Die Ergebnisse (51) führen nun gemäß dem Ansatz (10) mit $\mathrm{i} \;=\; +\sqrt{-1}$ für $\nu \in \{0;1;2;3\}$:

$$y_{(\nu+1)} \;=\; \sum_{\mu=1}^{3} \pm\,\frac{\sqrt{\zeta_\mu}}{2}\,\mathrm{e}^{\left(\frac{2\,\pi\,\mathrm{i}\,\mu\,\nu}{4}\right)} \;=\; \sum_{\mu=1}^{3} \pm\,\frac{\sqrt{\zeta_\mu}}{2}\,\mathrm{i}^{(\mu\,\nu)} \;=\; \sum_{\mu=1}^{3} \pm\,\left(\sqrt{-1}\right)^{(\mu\,\nu)}\,\frac{\sqrt{\zeta_\mu}}{2} \tag{52}$$

auf die konkreten Ergebnisse mit $+\sqrt{\zeta_\mu}$:

$$\begin{aligned} y_1 &= \tfrac{1}{2}\left(+\sqrt{-2\,p} + \sqrt{\tfrac{-q}{\sqrt{2\,p}}} + \sqrt{\tfrac{+q}{\sqrt{2\,p}}}\right), & y_2 &= \tfrac{1}{2}\left(-\sqrt{+2\,p} - \sqrt{\tfrac{-q}{\sqrt{2\,p}}} - \sqrt{\tfrac{-q}{\sqrt{2\,p}}}\right), \\ y_3 &= \tfrac{1}{2}\left(-\sqrt{-2\,p} + \sqrt{\tfrac{-q}{\sqrt{2\,p}}} - \sqrt{\tfrac{+q}{\sqrt{2\,p}}}\right), & y_4 &= \tfrac{1}{2}\left(+\sqrt{+2\,p} - \sqrt{\tfrac{-q}{\sqrt{2\,p}}} + \sqrt{\tfrac{-q}{\sqrt{2\,p}}}\right). \end{aligned} \tag{53}$$

Offensichtlich ist das Ergebnis $y_4 \;=\; +\sqrt{\frac{p}{2}}$ keine Lösung der Gleichung $y^4 + p\,y^2 + q\,y + \frac{p^2}{4} + \frac{q^2}{8\,p} = 0$. Die Formel (52) ist nicht symmetrisch bezüglich der Vertauschung der 3 Wurzeln. Deshalb erzeugt eine andere Reihenfolge der Wurzeln (51) andere Lösungen mit (52) und $\pm\sqrt{\zeta}$:

$$\begin{aligned} y_1 &= \tfrac{1}{2}\left(+\sqrt{\tfrac{+q}{\sqrt{2\,p}}} + \sqrt{-2\,p} + \sqrt{\tfrac{-q}{\sqrt{2\,p}}}\right) &&= \tfrac{1}{2}\left(+\sqrt{\tfrac{+q}{\sqrt{2\,p}}} + \sqrt{-2\,p} + \sqrt{\tfrac{-q}{\sqrt{2\,p}}}\right), \\ y_2 &= \tfrac{1}{2}\left(+\sqrt{\tfrac{-q}{\sqrt{2\,p}}} - \sqrt{-2\,p} - \sqrt{\tfrac{+q}{\sqrt{2\,p}}}\right) &&= \tfrac{1}{2}\left(-\sqrt{\tfrac{+q}{\sqrt{2\,p}}} - \sqrt{-2\,p} + \sqrt{\tfrac{-q}{\sqrt{2\,p}}}\right), \\ y_3 &= \tfrac{1}{2}\left(-\sqrt{\tfrac{+q}{\sqrt{2\,p}}} + \sqrt{-2\,p} - \sqrt{\tfrac{-q}{\sqrt{2\,p}}}\right) &&= \tfrac{1}{2}\left(-\sqrt{\tfrac{+q}{\sqrt{2\,p}}} + \sqrt{-2\,p} - \sqrt{\tfrac{-q}{\sqrt{2\,p}}}\right), \\ y_4 &= \tfrac{1}{2}\left(-\sqrt{\tfrac{-q}{\sqrt{2\,p}}} - \sqrt{-2\,p} + \sqrt{\tfrac{+q}{\sqrt{2\,p}}}\right) &&= \tfrac{1}{2}\left(+\sqrt{\tfrac{+q}{\sqrt{2\,p}}} - \sqrt{-2\,p} - \sqrt{\tfrac{-q}{\sqrt{2\,p}}}\right). \end{aligned} \tag{54}$$

Die Ergebnisse (54) sind symmetrisch bezüglich der Vertauschung der 3 Wurzeln ζ der *speziellen kubischen Resolvente* (50). Weil auf dem Lösungsweg zur kubischen Resolvente (46) quadriert wurde, müssen die Ergebnisse (54) auf jeden Fall eine Probe bestehen, zum Beispiel wegen $\sqrt{-1}\,\sqrt{-1} \;=\; -1 \;=\; \mathrm{i}^2 \;=\; (-\mathrm{i})^2$:

$$\begin{aligned} y_{1,3} &= \tfrac{1}{2}\left(\pm\sqrt{\tfrac{q}{\sqrt{2\,p}}} + \sqrt{-2\,p} \pm \sqrt{\tfrac{-q}{\sqrt{2\,p}}}\right) \\ y_{1,3}^2 &= \tfrac{1}{2}\left(-p \pm \sqrt{-q\,\sqrt{2\,p}} + \sqrt{\tfrac{-q^2}{2\,p}} \mp \sqrt{q\,\sqrt{2\,p}}\right) \\ y_{1,3}^4 &= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{p^2}{2} - \tfrac{q^2}{4\,p} \mp p\,\sqrt{-q\,\sqrt{2\,p}} - p\,\sqrt{\tfrac{-q^2}{2\,p}} \pm p\,\sqrt{q\,\sqrt{2\,p}} \mp q\,\sqrt{\tfrac{q}{\sqrt{2\,p}}} - q\,\sqrt{-2\,p} \mp q\,\sqrt{\tfrac{-q}{\sqrt{2\,p}}}\right) \end{aligned} \tag{55}$$

Alle 4 Fälle (55,56) erfüllen die Probe in $y^4 \;+\; p\,y^2 \;+\; q\,y \;+\; \frac{p^2}{4} \;+\; \frac{q^2}{8\,p} \;=\; 0$:

$$\begin{aligned} y_{2,4} &= \tfrac{1}{2}\left(\mp\sqrt{\tfrac{q}{\sqrt{2\,p}}} - \sqrt{-2\,p} \pm \sqrt{\tfrac{-q}{\sqrt{2\,p}}}\right) \\ y_{2,4}^2 &= \tfrac{1}{2}\left(-p \pm \sqrt{-q\,\sqrt{2\,p}} - \sqrt{\tfrac{-q^2}{2\,p}} \pm \sqrt{q\,\sqrt{2\,p}}\right) \\ y_{2,4}^4 &= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{p^2}{2} - \tfrac{q^2}{4\,p} \mp p\,\sqrt{-q\,\sqrt{2\,p}} + p\,\sqrt{\tfrac{-q^2}{2\,p}} \mp p\,\sqrt{q\,\sqrt{2\,p}} \pm q\,\sqrt{\tfrac{q}{\sqrt{2\,p}}} + q\,\sqrt{-2\,p} \mp q\,\sqrt{\tfrac{-q}{\sqrt{2\,p}}}\right) \end{aligned} \tag{56}$$

Die Aufgabe $\sqrt{-1}\,\sqrt{-1} \;=\; \sqrt{(-1)\,(-1)} \;=\; \sqrt{1} \;=\; 1$ kann auch zutreffen, deshalb formulierte (Carl Friedrich) Gauß den Wert $\mathrm{i} \;=\; +\sqrt{-1}$. Das Problem ist, dass die Substitution $\zeta \;=\; 4\,z_2^2$ auf 2 Lösungen $\pm\frac{1}{2}\,\sqrt{\zeta}$ führt. Deshalb funktioniert die Verwendung von Funktionen oder Formeln, die nur ein Ergebnis haben, nicht bei der Lösung algebraischer Gleichungen. Die Fallunterscheidung und die Proberechnung sind *notwendige* Bestandteile der Algebra. Es ist möglich, diese Teile der Algebra auch für die Computeralgebra zu programmieren, aber bisher verstehen die Programmierer zu wenig von der Algebra. Der Verfasser musste die Ergebnisse (54,55,56) von Hand ermitteln.

2.4.9 Probleme mit der Eindeutigkeit

Die 3 Lösungen der *kubischen Resolvente* (46) werden nach dem nun verwendeten Ansatz (10) zur Lösung der Gleichung 4-ten Grades zusammengeführt. Während der Herleitung der kubischen Resolvente muss immer quadriert werden, deshalb führt nicht jeder Ansatz, der ähnlich wie (10) ist, zu Lösungen. Die nun systematisch gefundene Lösungsstruktur weicht von der historischen Fassung von Cardano ([5], Abschnitt 2.4.2.3., Seite 133) ab, wo eine komplexwertige Summe vermieden wird und *dieselbe* kubische Resolvente (46) folgt:

$$\begin{pmatrix} y_1 & = & \frac{\sqrt{z_1}+\sqrt{z_2}-\sqrt{z_3}}{2} & y_2 & = & \frac{\sqrt{z_1}-\sqrt{z_2}+\sqrt{z_3}}{2} \\ y_3 & = & \frac{-\sqrt{z_1}+\sqrt{z_2}+\sqrt{z_3}}{2} & y_4 & = & \frac{-\sqrt{z_1}-\sqrt{z_2}-\sqrt{z_3}}{2} \end{pmatrix} . \tag{57}$$

Die Bestimmungsgleichungen, die aus diesem ebenfalls möglichen Ansatz (57) folgen, zeigt das folgende System:

$$\begin{pmatrix} z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - 2\,z_1\,z_2 - 2\,z_1\,z_3 - 2\,z_2\,z_3 & = & 16\,r \\ \sqrt{z_1}\,\sqrt{z_2}\,\sqrt{z_3} & = & q \\ -z_1 - z_2 - z_3 & = & 2\,p \end{pmatrix} . \tag{58}$$

Dieses Gleichungssystem ist sehr symmetrisch bezüglich der Vertauschung der 3 Wurzeln untereinander und führt über weiteren Rechenaufwand auf dieselbe *kubische Resolvente* (46) in $\zeta = z_2$ statt $\zeta = 4\,z_2^2$. Nun wurde eine *spezielle kubische Resolvente* (50) gefunden, deren 3 Wurzeln ohne Anwendung der Cardanischen Formel (25) dritten Grades bekannt sind. Auch in diesem Fall gibt es doppelt so viele Lösungen wie taugliche.
Die Probe der Lösungen (54) im System (58) führt auf den Fall

$$\left(+\sqrt{\zeta_1}\right)\,\left(+\sqrt{\zeta_2}\right)\,\left(+\sqrt{\zeta_3}\right) = -\sqrt{\frac{2\,p}{2\,p}\,q^2} = -q\,, \tag{59}$$

welcher zeigt, dass ein anderer Fall als über den Cardanischen Weg gefunden wurde. Nach einem Handbuch ([5], Abschnitt 2.4.2.3., Seite 133) kann dieser Fall vorkommen, aber dann benötigt die Cardanische Formel Vorsicht. Deshalb führten die Cardanische Formel und der Ansatz (10) bisher in konreten Fällen auf dieselben 4 Lösungen.
Die Frage, wieviele taugliche Lösungen eine algebraische Gleichung n-ten Grades enthält, ist bedeutsam und schwer zu klären. 1799 hatte (Carl Friedrich) Gauß seine Doktorprüfung über die Eindeutigkeit der n Wurzeln einer algebraischen Gleichung n-ten Grades ([1], § 31, Seiten 187-190). Bisher erhielt der Verfasser keine Kopie dieser Ausarbeitung von (Carl Friedrich) Gauß über den *Fundamentalsatz der Algebra*. Ein anderer Nachfolgender vollende diese Aufgabe.

2.4.10 Lösende Substitution

Eine weitere Möglichkeit zur Findung der *kubischen Resolvente* (46) in $\zeta = 4\,z^2$ ist die folgende Substitution der reduzierten Gleichung (42) 4-ten Grades:

$$y \to z \pm \frac{\sqrt{-q + \sqrt{q^2 - 4\,z^2\,\left(p + 2\,z^2\right)^2}}}{\sqrt{8\,z}} \mp \frac{\sqrt{-q - \sqrt{q^2 - 4\,z^2\,\left(p + 2\,z^2\right)^2}}}{\sqrt{8\,z}} . \tag{60}$$

Die Proberechnung zur Substitution (60) erfolgt analog zu (55) oder (56). Insgesamt zeigt sich, dass die Anforderungen mit zunehmendem Grad n steigen.

2.5 Gleichungen 5-ten Grades

2.5.1 Geschichte

Ist die reduzierte Gleichung 5-ten Grades linear in y^5, so ist sie lösbar, da eine *lineare Resolvente* vorliegt. Zur Findung einer *quadratischen Resolvente* in y^5 gibt Rothe ein wegweisendes Beispiel ([2], Aufgabe 13.e, Seiten 8-9) an, wo die Umkehrung von $x^5 - 5\,p\,x^3 + 5\,p^2\,x \;=\; y$ mit

$$x \;=\; \sqrt[5]{\frac{1}{2}\,y + \sqrt{\frac{1}{4}\,y^2 - p^5}} + \sqrt[5]{\frac{1}{2}\,y - \sqrt{\frac{1}{4}\,y^2 - p^5}}\,. \tag{61}$$

angegeben wird. Gleichungen fünften Grades gelten als selten gelöst.

2.5.2 Reduzierte Gleichung

Die reduzierte Gleichung 5-ten Grades lautet:

$$y^5 + p\,y^3 + q\,y^2 + r\,y + s \;=\; 0\,. \tag{62}$$

Sie lässt sich über den Produktansatz (10) mit $n = 5$ erzeugen.

2.5.3 Bestimmungsgleichungen

Durch Koeffizientenvergleich erhält man 4 Bestimmungsgleichungen in 4 noch unbekannten Wurzeln z_1 bis z_4:

$$\left(\begin{array}{ccc}
\begin{array}{c} -\left(z_1^5 + z_2^5 + z_3^5 + z_4^5\right) \\ -5\,\left(z_1\,z_3^2\,z_4^2 + z_1^2\,z_2\,z_3^2 + z_2^2\,z_3\,z_4^2 + z_1^2\,z_2^2\,z_4\right) \\ +5\,\left(z_1^3\,z_3\,z_4 + z_1\,z_2^3\,z_3 + z_2\,z_3^3\,z_4 + z_1\,z_2\,z_4^3\right) \end{array} & = & s \\
 & & \\
\begin{array}{c} 5\,\left(z_2^2\,z_3^2 + z_1^2\,z_4^2\right) \\ -5\,\left(z_1^3\,z_2 + z_2^3\,z_4 + z_1\,z_3^3 + z_3\,\,z_4^3 + z_1\,z_2\,z_3\,z_4\right) \end{array} & = & r \\
 & & \\
-5\,\left(z_1^2\,z_3 + z_1\,z_2^2 + z_3^2\,z_4 + z_2\,z_4^2\right) & = & q \\
 & & \\
-5\,\left(z_2\,z_3 + z_1\,z_4\right) & = & p
\end{array}\right)\,. \tag{63}$$

Eine allgemeine Lösung dieses Gleichungssystems ist bislang nicht geglückt.

2.5.4 Nur 1 Wurzel

Sind 3 der 4 Wurzeln Null, so vereinfacht sich das Gleichungssystem (63) auf folgende Einsicht:

$$z^5 \;=\; -s\,; \qquad 0 \;=\; r \;=\; q \;=\; p\,. \tag{64}$$

Dieser Fall ist immer lösbar.

2.5.5 2 Wurzeln Null, erster Fall

Sind 2 Wurzeln Null, so gilt im ersten Fall $z_2 = z_3 = 0$ oder $z_1 = z_4 = 0$, wodurch sich das Gleichungssystem (63) beispielsweise auf folgende Aufgabe reduziert:

$$\left(\begin{array}{ccccccc} -(z_1^5 + z_4^5) & = & s\,; & \qquad & 5\,z_1^2\,z_4^2 & = & r \\ 0 & = & q\,; & \qquad & -5\,z_1\,z_4 & = & p \end{array} \right) . \tag{65}$$

Wie leicht einzusehen ist, lautet der Grundtyp der zugehörigen Gleichung: $y^5 + p\,y^3 + \frac{p^2}{5}\,y + s \;=\; 0$. Es bleiben also 2 Gleichungen in 2 Unbekannten z_1 und z_4, die auf die Substitution $z_4 \to -\frac{p}{5\,z_1}$ führen. Daraus folgt eine *quadratische Resolvente* in $z^5 \;=\; z_1^5$:

$$z^{10} + s\,z^5 - \left(\frac{p}{5}\right)^5 \;=\; 0\,, \tag{66}$$

deren Lösung analog zur kubischen Lösung (24) lautet:

$$\left(z^5\right)_{1,4} \;=\; -\frac{s}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{5}\right)^5}\,. \tag{67}$$

Dieses Beispiel für eine lösbare Gleichung 5-ten Grades war schon unter Ergebnis (61) angegeben worden.

2.5.6 2 Wurzeln Null, zweiter Fall

Im zweiten Fall gilt $z_1 = z_2 = 0$, $z_1 = z_3 = 0$, $z_2 = z_4 = 0$ oder $z_3 = z_4 = 0$. Dadurch reduziert sich das Gleichungssystem (63) zum Beispiel auf die folgende Aufgabe:

$$\left(\begin{array}{ccccccc} -(z_1^5 + z_2^5) & = & s\,; & \qquad & -5\,z_1^3\,z_2 & = & r \\ -5\,z_1\,z_2^2 & = & q\,; & \qquad & 0 & = & p \end{array} \right) . \tag{68}$$

Dies sind 3 Gleichung in 2 Unbekannten z_1 und z_2, deshalb entsteht im Lösungsfall eine weitere Beziehung zwischen q, r und s, außerdem gilt $p = 0$. Die zweite und die dritte Gleichung werden jeweils linear nach z_2 und z_1 aufgelöst, dann werden die Ergebnisse über Kreuz eingesetzt. Dies ergibt:

$$\left(\begin{array}{ccccccc} s & = & \frac{r^2}{5\,q} - \frac{q^3}{25\,r}\,; & \qquad & z_1^5 & = & -\frac{r^2}{5\,q} \\ z_2^5 & = & \frac{q^3}{25\,r}\,; & \qquad & p & = & 0 \end{array} \right) . \tag{69}$$

Angesichts dieser Lösungen fällt schnell auf, dass die Bearbeitung dieser Gleichungen vom Geschick abhängt, um eine Lösung zu finden. Die Beziehung zwischen q, r und s folgt aus der Proberechnung.
Der Verfasser gelangte erste 2008 zu dieser Lösung, die selbstverständlich durch Ziehen der 5-ten Wurzeln zu 5 verschiedenen Lösungen der Art $y = z_1 + z_2$ führt. Dieser Fall ist eventuell noch nicht in der Literatur zu finden.

2.5.7 1 Wurzel Null

Ist eine der 4 Wurzeln in den Bestimmungsgleichungen (63) Null, dann folgt nur noch 1 Fall, der zum Beispiel für $z_4 \to 0$ besprochen werden kann. Das reduzierte Gleichungssystem (63) lautet:

$$\left(\begin{array}{rcl} -\left(z_1^5 + z_2^5 + z_3^5\right) - 5\, z_1^2\, z_2\, z_3^2 + 5\, z_1\, z_2^3\, z_3 & = & s \\ 5\, z_2^2\, z_3^2 - 5\, \left(z_1^3\, z_2 + z_1\, z_3^3\right) & = & r \\ -5\, \left(z_1^2\, z_3 + z_1\, z_2^2\right) & = & q \\ -5\, z_2\, z_3 & = & p \end{array} \right) . \tag{70}$$

Dieses Gleichungssystems führt wie das allgemeine System (63) von unten nach oben zu einer linearen, quadratischen, kubischen und verbleibenden Gleichung. Durch Proberechnung wird voraussichtlich auch hier eine Beziehung zwischen p, q, r und s gefunden. Die Substitution der linearen Lösung $z_3 = -\frac{p}{5\, z_2}$ ergibt:

$$\left(\begin{array}{rcl} -z_1^5 - z_2^5 + \frac{p^5}{3125\, z_2^5} - \frac{p^2\, z_1^2}{5\, z_2} - p\, z_1\, z_2^2 & = & s \\ \frac{p^2}{5} - 5\, z_1^3\, z_2 + \frac{p^3\, z_1}{25\, z_2^3} & = & r \\ \frac{p}{z_2}\, z_1^2 - 5\, z_2^2\, z_1 - q & = & 0 \end{array} \right) . \tag{71}$$

Nun ist die leichteste Gleichung eine quadratische Gleichung in z_1, deren Lösung lautet:

$$(z_1)_{1,2} = \frac{5\, z_2^3}{2\, p} \pm \frac{\sqrt{z_2}\sqrt{25\, z_2^5 + 4\, p\, q}}{2\, p} \tag{72}$$

Wird dieses Ergebnis in die Bestimmungsgleichungen (71) eingesetzt, so ergeben sich 2 Gleichungen in z_2. Sicher ist es möglich, alle Wurzelterme aus der Gleichung (72) zu isolieren und jeweils jede der Gleichungen zu quadrieren, dann resultieren nur noch Terme in z_2^5:

$$\left(\begin{array}{cc} \left(-\frac{p\, q}{5} - s + \frac{p^5}{3125\, z_2^5} - 6\, z_2^5 - \frac{25\, q^2\, z_2^5}{2\, p^3} - \frac{625\, q\, z_2^{10}}{2\, p^4} - \frac{3125\, z_2^{15}}{2\, p^5}\right)^2 & = \\ \left(4\, p\, q\, +\, 25\, z_2^5\right) \left(\sqrt{z_2^5} + \frac{q^2\, \sqrt{z_2^5}}{2\, p^3} + \frac{75\, q\, \sqrt{z_2^{15}}}{2\, p^4} + \frac{625\, \sqrt{z_2^{25}}}{2\, p^5}\right)^2 & ; \\ \left(\frac{3\, p^2}{10} - r - \frac{75\, q\, z_2^5}{2\, p^2} - \frac{625\, z_2^{10}}{2\, p^3}\right)^2 & = \\ \left(4\, p\, q\, +\, 25\, z_2^5\right) \left(-\frac{p^2}{50\, \sqrt{z_2^5}} + \frac{5\, q\, \sqrt{z_2^5}}{2\, p^2} + \frac{125\, \sqrt{z_2^{15}}}{2\, p^3}\right)^2 & . \end{array} \right) \tag{73}$$

Das Ausmultiplizieren und Setzen jeweils aller Terme auf die linke Seite der Gleichungen schließt das Gleichungssystem auf: Es folgt die gesuchte *kubische Resolvente* in $\zeta = z_2^5$ und eine weitere Gleichung, die die noch unbekannte Beziehung zwischen p, q, r und s für den hier betrachteten Spezialfall ermittelt:

$$\left(\begin{array}{rcl} \left(\frac{p}{5}\right)^{15} - 2\left(\frac{p}{5}\right)^{10}\left(\frac{p\, q}{5} + s\right) & \zeta & \\ -\left(\frac{p}{25}\right)^5 \left(12\, p^5 - 100\, p^2\, q^2 - 1250\, p\, q\, s - 3125\, s^2\right) & \zeta^2 & \\ -\frac{1}{5^6}\, \left(9\, p^6\, q - 5\, p^3\, q^3 + 5\, q^5 - 60\, p^5\, s - 125\, p^2\, q^2\, s\right) & \zeta^3 & \\ +\frac{p}{625} \left(2\, p^4 - 10\, p\, q^2 + 125\, q\, s\right) \zeta^4 + s\, \zeta^5 + \zeta^6 & = & 0 \end{array} \right) ; \tag{74}$$

$$\left(\begin{array}{rcl} \frac{p^8\, q}{3125} - \frac{p^3}{125} \left(2\, p^4 + 10\, p\, q^2 - 15\, p^2\, r + 25\, r^2\right) & \zeta & \\ +q\, \left(2\, p^3 + 5\, q^2 - 15\, p\, r\right) \zeta^2 + 25\, \left(p^2 - 5\, r\right) \zeta^3 & = & 0 \end{array} \right) . \tag{75}$$

Nun ist das gefürchtete Problem der Unvereinbarkeit kubischer Wurzeln und 5-ter Potenzen durch eine zu lösende kubische Gleichung in $\zeta = z_2^5$ gelöst. Die *kubische Resolvente* (75) ist also gefunden! Sie ist völlig unabhängig von dem Wert s, für den die Gleichung (74) quadratisch ist. Bei Substitution der Lösung der *kubischen Resolvente* (75) in die verbleibende Gleichung (74) treten Probleme auf, die damit zusammenhängen, dass das Theorem zur Vereinfachung kubischer Wurzeln im Sinne der quadratischen Lösung von Gleichung (25) noch fehlt. Deshalb gelang es dem Verfasser nicht, durch einfache Terme die Beziehung zwischen p, q, r und s, zu finden, welche zweifellos besteht und zu dem nun abgehandelten Spezialfall der Gleichungen 5-ten Grades führt. Wichtiger scheint die Untersuchung zu sein, ob die Lösung kubischer Gleichungen nur in Termen mit Quadratwurzeln immer möglich ist. Vielleicht könnte dies das alte Problem der griechischen Mathematik lösen, wo es unmöglich erscheint, die Zahl $\sqrt[3]{2}$ mit Zirkel und Lineal zu konstruieren. Der Rechenaufwand mit derart großen Termen ist auch mit *Mathematica*[14] groß. Der Verfasser bevorzugt deshalb die Vorstellung der schon gefundenen Ergebnisse und freut sich darauf, dass ein nachfolgender Mathematiker durch diese Hilfe auch die allgemeine Lösung der algebraischen Gleichungen 5-ten und höheren Grades erreichen kann. Der Wahlspruch von (Carl Friedrich) Gauß (1777 - 1855) lautet ebenfalls: ,,*pauca, sed matura.*"[15] (lateinisch: ,,wenig, aber ausgereift"; [3], Seite 127)). Ohne die wegweisende Arbeit von Gauß hätten wir eventuell heute keine genaue Vorstellung davon, wie $\mathrm{i} = +\sqrt{-1}$ zu gebrauchen und wie damit zu rechnen ist.

3 Weitere Möglichkeiten

3.1 Abweichungen bei Cardano und Ferrari

Der Ansatz (10) ist nur *eine* von mehreren Möglichkeiten. Schon Ferrari und Cardano weichen bei ihrer historischen Lösung (57) davon ab. Letztlich kommt es nur davon an, dass alle n Wurzeln einer algebraischen Gleichung n-ten Grades linear unabhängig sind und den Koeffizienten $c_{(n-1)}$ in der Summe (11) zu Null machen. So sind andere Bestimmungsgleichungen möglich, als hier abgehandelt.

3.2 Die Unvollständigkeit der Galois-Theorie?

Diese Möglichkeit hat auch (Évariste) Galois[16] ([4], Seiten 116-117) übersehen, weil allein für $n = 5$ mindestens $2^4 = 16$ verschiedene Gleichungssysteme der Art (63) untersucht und begründet verworfen werden müssen, bevor die Unlösbarkeit der algebraischen Gleichungen 5-ten Grades als bewiesen gilt. Die Rechenzeit, die hierfür benötigt wird, wird für die Berechnung von Hand mit mindestens 1 Monat abgeschätzt, für die Proberechnung der Ergebnisse sicher die gleiche Dauer, deshalb sind mindestens 32 Personenmonate Arbeitszeit nötig. Mit einer verbesserten Computeralgebra, die auch Terme mit langen Brüchen sicher und schnell transformieren kann, kann nun dieses Problem erneut und viel ausführlicher als früher angegangen werden. *Mathematica* 3.0.0 benötigte auf einem Rechner mit 433 Megahertz Taktfrequenz etwa 200 Sekunden, um die Bestimmungsgleichungen (63) in einem von mindestens 16 Fällen zu berechnen.

[14][Mathematika], ein Programm von Herrn (Stephen) Wolfram [(Stifen) Wolfram], U.S.A.
[15][pauka, sed matura]
[16]französisch: Herr [(Ewarist) Galoah] (1811 - 1832)

Diese Überlegung wird eventuell durch die Einsicht relativiert, dass die 2^4 Fälle jedes Mal durch eine Vertauschung $z_\mu \to -z_\mu$ zustande kommen, was die Natur der Bestimmungsgleichungen nicht ändert. Außerdem besteht bisher nur *eine* Variante (63), die *linear unabhängige* Faktoren enthält und auf rein reelle Koeffizienten der Bestimmungsgleichungen führt.

3.3 Mögliche Trugschlüsse

Das Beweisen von Unmöglichkeit erfordert das Ausschöpfen aller möglichen Varianten. Nun soll am Beispiel der algebraischen Gleichungen 4-ten Grades gezeigt werden, was passiert, wenn statt einem *scharfen Blick* (wie gezeigt) das Gleichungssystem (43) automatisiert gelöst wird, das nun auf die *kubische Resolvente* (46) geführt hat:
Die Substitution der *linearen* Lösung $z_3 = -\frac{p+z_2^2}{4\,z_1}$ ergibt die folgenden Restgleichungen:

$$\left(\begin{array}{lcl} -\left(\frac{p}{4}\right)^4 + \frac{p^2\,z_1^4}{8} - z_1^8 - \frac{p^3\,z_2^2}{32} + \frac{3\,p\,z_1^4\,z_2^2}{2} & & \\ -\frac{3\,p^2\,z_2^4}{32} + \frac{7\,z_1^4\,z_2^4}{2} - \frac{p\,z_2^6}{8} - \frac{z_2^8}{16} - r\,z_1^4 & = & 0\,; \\ 4\,z_2\,z_1^4 + q\,z_1^2 + z_2\left(\frac{p^2}{4} + p\,z_2^2 + z_2^4\right) & = & 0\,. \end{array}\right) \tag{76}$$

Die untere dieser beiden Gleichungen kann als *quadratische Gleichung* in z_1^2 verstanden und gelöst werden:

$$(z_1^2)_{1,2} = -\frac{q}{8\,z_2} \pm \frac{\sqrt{q^2 - 4\,p^2\,z_2^2 - 16\,p\,z_2^4 - 16\,z_2^6}}{8\,z_2} \tag{77}$$

Dieses Ergebnis (77) wird in die obere Gleichung von (76) eingesetzt, danach werden die Wurzeln auf eine Seite gebracht und der Rest auf die andere Seite, bevor quadriert wird. Dies erzeugt das folgende Zwischenergebnis:

$$\begin{array}{r} \Big(-\frac{q^4}{512} + \frac{3\,p^2\;q^2\,z_2^2}{256} - \frac{q^2\,r\,z_2^2}{32} - \frac{p^4\,z_2^4}{64} + \frac{5\,p\,q^2\,z_2^4}{64} + \frac{p^2\,r\,z_2^4}{16} \\ -\frac{3\,p^3\,z_2^6}{16} + \frac{9\,q^2\,z_2^6}{64} + \frac{p\,r\,z_2^6}{4} - \frac{13\,p^2\,z_2^8}{16} + \frac{r\,z_2^8}{4} - \frac{3\,p\,z_2^{10}}{2} - z_2^{12}\Big)^2 \quad = \\ (q^2 - 4\,p^2\,z_2^2 - 16\,p\,z_2^4 - 16\,z_2^6)\left(-\frac{q^3}{512} + \frac{p^2\,q\,z_2^2}{128} - \frac{q\,r\,z_2^2}{32} + \frac{p\,q\,z_2^4}{16} + \frac{q\,z_2^6}{8}\right)^2 \end{array} \tag{78}$$

Mit Hilfe von *Mathematica* 3.0.0 und der Funktion **Simplify**[17] wird das Ergebnis wie folgt vereinfacht, weil auch Linearfaktoren erkannt und ausgeklammert werden:

$$\left(\frac{z_2}{4}\right)^4 \left(\frac{p + 2\,z_2^2}{4}\right)^4 \left(q^2 - 4\left(p^2 - 4\,r\right) z_2^2 - 32p\,z_2^4 - 64\,z_2^6\right)^2 = 0 \tag{79}$$

Mit $z_3 = -\frac{p+2\,z_2^2}{4\,z_1}$ wird schnell deutlich, dass diese Gleichung für den gefundenen Fall $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$ und $z_3 \neq 0$ auf die *kubische Resolvente* (46) in $\zeta = 4\,z_2^2$ führt. Es ist also ein Fall gefunden, durch den das systematische Beschreiten des Lösungswegs auf ein Ergebnis führt, das nicht gleich der gesuchten *Resolvente* ist, sondern diese *enthält*.

[17] [simplifaj], englisch: **Vereinfachen**

Es muss also bis zum Ende gerechnet werden, bevor man berechtigt ist, auf eine Unlösbarkeit für das entsprechende n zu folgern. Für $n \geq 5$ tauchte das Problem auf, dass das Theorem der Art (25) existiert, aber nur in Quadratwurzeln noch unbekannt ist. Dadurch ist die Galois-Theorie mindestens erschüttert.
Das war zu zeigen. (lateinisch: *quod erat demonstrandum*[18].)

4 Ausblick

So ist gezeigt, wie bis zur *kubischen Resolvente* bei einer algebraischen Gleichung n-ten Grades vorzugehen ist, also in den Fällen, wo bis zu 3 von $(n-1)$ Wurzeln der zugehörigen Resolvente ungleich Null sind.
Die prinzipielle Lösbarkeit aller algebraischen Gleichungen n-ten Grades wurde durch den Produktansatz (10) explizit gezeigt. Dabei entstehen für eine Gleichung n-ten Grades $(n-1)$ Wurzeln z_μ aus der zugehörigen *Resolvente* $(n-1)$-ten Grades. Dies gilt auch für $n \geq 5$. Die Auflösung der Bestimmungsgleichungen der Art (63) in diese *Resolvente* kann mitunter kompliziert sein. Dies ist trotzdem kein Beweis für Unlösbarkeit.
Um bei der algebraischen Lösung weiter zu kommen, kann eine Verfeinerung der Wurzeln z_μ angestrebt werden, was zunächst in eine durchführbare Fallunterscheidung führt, da das Unterpolynom auf der rechten Seite von Gleichung (7) höchstens vom Grade $(n-1)$ ist.
Das nächste anzustrebende Teilergebnis ist eine Rechenoperation, die auf die reduzierte Resolvente führt. Anschaulich ist damit das Zentrum, um das herum die Wurzeln von Eins gezogen werden, bekannt.
Weitere interessante Studien sind Wurzelsätze, die das Abspalten eines Linearfaktors oder auch quadratischer oder höherer Ordnung von einer reduzierten Gleichung n-ten Grades erlauben.
Welche der bestehenden Möglichkeiten schließlich zum Erfolg führt, bleibt abzuwarten. Die algebraischen Gleichungen sind jedenfalls immer noch geeignet, um Bescheidenheit in Sachen analytischer Lösbarkeit zu üben. *Unlösbarkeit* kann trotzdem nur *bewiesen werden* im Rahmen einer vorläufigen Arbeitshypothese, die den jeweils aktuellen Stand der Forschung wiedergibt.

5 Dank

Diese Skizze wurde nicht finanziell unterstützt und konnte trotzdem über einige Jahre reifen. Für Anregungen und Korrekturen ist der Verfasser dankbar. Der Verfasser dankt

- (Hanns-Georg) Kilian[19] für die Ermutigung zu dieser Ausarbeitung,
- (Stephen) Wolfram[20] für das Programmieren des zuverlässigen *Mathematica*-Kerns,
- (Gerd) Baumann[21] für die Einweisung in die *Mathematica*-Programmierung und
- (Jörg) Volkmann[22] für die Diskussion.

[18] [kwod erat demonstrandum]
[19] deutsch: Herr [(Hans-Georg) Kilian], Ulm /Danau (Deutschland)
[20] englisch: Herr [(Stifen) Wolfram], U.S.A.
[21] deutsch: Herr [(Gerd) Baumann], Ulm /Danau, München (Deutschland) und Kairo (Ägypten)
[22] deutsch: Herr [(Jörg) Volkmann], Wolfsburg (Deutschland)

Literatur

[1] (R.) Rothe[23], *Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker, Ingenieure*, Teil **I**, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 14. Auflage, (1954)

[2] (R.) Rothe, *Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker, Ingenieure*, Teil **IV**, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 9. Auflage, (1955)

[3] (Erich) Worbs[24], *Carl Friedrich Gauß - Ein Lebensbild*, Koehler & Amelang, Leipzig, 2. verbesserte Auflage, (1955)

[4] (W.) Gellert[25], (H.) Küstner[26], (M.) Hellwich[27], (H.) Kästner[28], (H.) Reichardt[29], *Kleine Enzyklopädie Mathematik*, VEB Bibliographisches Institut, Leipzig, 9. gekürzte Auflage, (1974)

[5] (I. N.) Bronstein[30], (K. A.) Semendjajew[31], (G.) Grosche[32], (V.) Ziegler[33], (D.) Ziegler[34], *Taschenbuch der Mathematik*, Gemeinschaftsausgabe Nauka, Moskau und BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 23. Auflage, (1987)

[6] (Kurt) Hawlitschek[35], *Johann Faulhaber 1580-1635*, Veröffentlichungen der Stadtbibliothek Ulm /Donau, Band **18**, (1995)

[7] (Hans-Wolfgang) Henn[36], *Oregamics – Papierfalten mit mathematischem Spürsinn*, Die neue Schulpraxis, Heft **6/7**, (2003), 49-53

[8] (Helmut) Albrecht[37], *Warum Elefanten dicke Beine haben – Mathematik zum Schmunzeln und Staunen*, Books on Demand, Norderstedt, 1. Auflage, (2009)

[23] deutsch: Herr [(R.) Rote]
[24] [deutsch: Herr (Erich) Worbs]
[25] deutsch: [(V.) Gelert]
[26] deutsch: [(H.) Küstna]
[27] deutsch: [(M.) Helvich]
[28] deutsch: [(H.) Kästna]
[29] deutsch: [(H.) Rajchart]
[30] russisch: [(I. N.) Bronstajn]
[31] russisch: [(K. A.) Semendjajef]
[32] deutsch: [(G.) Grosche]
[33] deutsch: [(V.) Ziegla]
[34] deutsch: [(D.) Ziegla]
[35] deutsch: Herr [(Kurt) Havlitschek]
[36] deutsch: Herr [(Hans-Wolfgang) Henn]
[37] deutsch: Herr [(Helmut) Albrecht]