Beweis zur Fermatschen Vermutung (Großer Fermatscher Satz)

Norbert Südland*†
Otto–Schott–Straße 16, D–73431 Aalen, Germany

8. 8. 2002 und 8. 2. 2008

Zusammenfassung

Ein für Schulzwecke geeigneter Beweis zur Fermatschen Vermutung (Großer Fermatscher Satz) wird angegeben, der nicht nur für Spezialisten nachvollziehbar ist.

1 Aufgabe

In einem Lexikon aus dem Jahre 1953 steht darüber zu lesen [Lex1953][1]:

> „…Berühmt wurde die nach ihm ben. F. sche Vermutung (Großer F. scher Satz): von F. ausgesprochene Behauptung, die bis heute allen allg. Beweisen der größten Math. widerstanden hat, daß die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ für n (natürl. Zahl) > 2 u. positiv ganzzahlige x, y, z nicht besteht. Ein Beweis für diese Behauptung konnte bis heute nicht erbracht werden. Der »*wahrhaft wunderbare Beweis*«, den F. zu besitzen angab, ist nicht bekannt. Paul Wolfskehl (Darmstadt) stiftete 1908 100 000 M für die erste vollkommene Lösung bis zum Jahr 2007."

Im Jahre 1993 legte Andrew Wiles [Enc1997][2] einen langen Beweis (ca. 200 Seiten) vor, der für die Lehre keine Rolle spielt, da er zu lang ist. Nun geht es vor allem um einen kurzen und anschaulichen Beweis, der möglichst alle Lösungen zur besagten Gleichung enthält und auch mit den Mitteln zu bewerkstelligen ist, die Fermat vorgelegen haben mögen.

*E–Mail–Adresse: Norbert.Suedland@t–online.de
†Internet: http://www.Norbert–Suedland.info

[1] Stichwort „Fermat", Seite 293
[2] Stichwort „Fermatsche Vermutung"

2 Lösung durch Vereinfachungen der Aufgabe

2.1 Motivation

Die Ausgangsgleichung

$$x^n + y^n \;=\; z^n \tag{1}$$

befindet sich in einer Form, die nur für die Aufgabenstellung selbst als optimiert erscheint.

2.2 Gezielte Umformung

Sie wird alternativ umgeschrieben, damit eine Differenz aus zwei Potenzen auftritt:

$$x^n \;=\; z^n - y^n. \tag{2}$$

Dann wird durch y^n dividiert, wobei mit $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ und reellem n folgt:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n \;=\; \left(\frac{z}{y}\right)^n - 1. \tag{3}$$

Die rechte Seite kann als endliche geometrische Folge aufgefaßt werden.

2.3 Endliche geometrische Folge

Die endliche geometrische Folge [BrS1987][3] ergibt für natürliche n:

$$q^n - 1 \;=\; (q-1)\sum_{\mu=0}^{n-1} q^\mu. \tag{4}$$

Die Richtigkeit dieses Zusammenhangs kann mit Hilfe einer *Teleskopsumme* durch Ausmultiplizieren bewiesen werden:

$$(q-1)\sum_{\mu=0}^{n-1} q^\mu \;=\; \sum_{\mu=0+1}^{n-1+1} q^\mu \;-\; \sum_{\mu=0}^{n-1} q^\mu \;=\; q^n - 1. \tag{5}$$

Wird die geometrische Folge nun wieder mit y^n multipliziert, so ergibt sich wegen $q = \frac{z}{y}$ eine Verallgemeinerung der geometrischen Folge(4):

$$z^n - y^n \;=\; (z-y)\sum_{\mu=0}^{n-1} z^\mu\, y^{n-1-\mu}. \tag{6}$$

Damit läßt sich vor allem zeigen, daß ein Vorfaktor $(z-y)$ existiert. Wegen der Eindeutigkeit der Primfaktoren–Zerlegung einer ganzen Zahl führt dieser häufig zu einer möglichen Division der Gleichung mit $(z-y)^n$, wenn die Fermatsche Forderung zutrifft. Für die weitere Betrachtung werde dieser Faktor mit b bezeichnet.

Ist eine derartige Lösung gefunden, so können unendlich viele weitere Lösungen gleichen Typs durch Multiplikation mit der n-ten Potenz einer natürlichen Zahl gefunden werden.

[3] Abschnitt 2.3.2., Seite 114

2.4 Erste Substitution der Aufgabenstellung

Damit ergibt sich folgende Substitution, die die Gleichung für die drei Unbekannten x, y und z in eine Gleichung mit anderen drei Unbekannten x, y und b transformiert:

$$z - y \;=\; b \tag{7}$$

mit der Lösung:

$$z \rightarrow y + b. \tag{8}$$

Eine Alternative zur Aufgabenstellung (2) ergibt sich nicht bei Substitution der ursprünglichen Summe (1), da die Summe aus zwei Potenzen nicht mit Hilfe der endlichen geometrischen Folge vereinfacht werden kann.

Die substituierte Gleichung ist – verglichen mit Gleichung (2) –

$$x^n \;=\; (y+b)^n \;-\; y^n \tag{9}$$

für natürliche x, y, b und n der Weg zur allgemeinen Lösung.

Ein weiterer Zusammenhang ist erforderlich, der auf eine weitere Substitution führt.

2.5 Binomischer Lehrsatz

Fermat hat auch mit Pascal [Lex1953][4] zusammen gearbeitet, der die europäische Form des Binomischen Lehrsatzes ausgearbeitet hat. Sie lautet:

$$(a+b)^n \;=\; \sum_{\mu=0}^{n} \binom{n}{\mu}\, a^\mu\, b^{n-\mu}. \tag{10}$$

Die hier verwendeten Binomialkoeffizienten $\binom{n}{\mu}$ bauen das *Chinesische Dreieck* [Oli1995][5] (in Europa auch *Pascalsches Dreieck* [Lex1953][6]) auf und genügen folgender Differenzengleichung:

$$\binom{n+1}{\mu+1} \;=\; \binom{n}{\mu} \;+\; \binom{n}{\mu+1}. \tag{11}$$

Pascal war in der Lage, jeden Binomialkoeffizienten durch Anwendung der Fakultät $n! \;=\; \prod_{\mu=1}^{n} \mu$ direkt zu berechnen, wobei n eine nicht–negative ganze Zahl ist:

$$\binom{n}{\mu} \;=\; \frac{n!}{\mu!\,(n\;-\;\mu)!}. \tag{12}$$

Ein leeres Produkt ergibt Eins, so daß die Binomialkoeffizienten bekannt und eindeutig für alle (hier verwendeten) Argumente sind.

[4]Stichwort „Pascal“, Seite 754
[5]Kapitel „Was Pascal Chinese?“, Seite 102–105
[6]Stichwort „Pascalsches (arithmetisches) Dreieck“, Seite 754

2.6 Umformung mit dem Binomischen Lehrsatz

Die verbliebene Aufgabenstellung (9) kann nun nach dem Binomischen Lehrsatz eindeutig für alle natürlichen n in folgender Weise vereinfacht werden:

$$x^n \;=\; \sum_{\mu=0}^{n-1} \binom{n}{\mu} y^\mu \, b^{n-\mu}. \tag{13}$$

Die Summenschreibweise nach Leibniz (1646–1716) [Lex1953][7] stammt zwar aus der Zeit nach Fermat (1601–1665) [Lex1953][8], ist aber zur Veranschaulichung des Beweisgangs hier sehr nützlich, da sonst eine Pünktchenschreibweise nötig würde, die weniger Klarheit darstellt.

2.7 Zweite Substitution der Aufgabenstellung

Die verbliebene Aufgabenstellung (13) für natürliche n erhält man auch, wenn man die n-te Wurzel aus der ganzzahligen Summe zieht und das Ergebnis x nennt: Dieses ganzzahlige x ist ja gesucht.

Der Binomische Lehrsatz samt Binomialkoeffizienten ist sehr eindeutig und eine zwingende Form, um überhaupt eine n-te Wurzel glatt ziehen zu können: Die gefundene Lösung muß den Binomischen Lehrsatz allemal erfüllen!

Die n-te Potenz einer ganzen Zahl muß zu der Summe addiert werden. Damit kann die Gleichung jeweils mit x^n addiert werden:

$$0 \;=\; -x^n - y^n + (y+b)^n. \tag{14}$$

Eine Anwendung des Binomischen Lehrsatzes ergibt auch in dieser Schreibweise bei Koeffizientenvergleich die Bedingung

$$-x^n - y^n \;=\; 0, \tag{15}$$

damit eine n-te Potenz alleine steht:

$$y^n \;=\; -x^n. \tag{16}$$

Diese Bestimmungsgleichung (16) kann auch direkt aus Gleichung (13) abgeleitet werden. Andere Möglichkeiten läßt der Binomische Lehrsatz nicht zu, wenn sie nicht schon vor der Bestimmungsgleichung (16) als Spezialfall gefunden wurden.

2.8 Allgemeine Lösungstripel

Die Bestimmungsgleichung (16) läßt sich durch x^n teilen, was auf n verschiedene Wurzeln von -1 führt:

$$\frac{y}{x} \;=\; \sqrt[n]{-1}\,. \tag{17}$$

Diese Wurzeln sind wegen $\mathrm{i} \;=\; \sqrt{-1}$ für gerade n nicht reell.

[7] Stichwort „Leibniz“, Seite 586

[8] Stichwort „Fermat“, Seite 293

Für alle $n \neq 0$ ergibt sich die Lösungsmöglichkeit $y \to 0$, scheidet aber aus, da Null nicht eine natürliche Zahl ist.

Für ungerade n ergibt sich zusätzlich die Lösungsmöglichkeit $y \to -x$, die auf $z = y + b = 0$ zurück führt.

Damit existieren jeweils drei ganze Zahlen, die die Ausgangsgleichung (nach Rücksubstitution) lösen:

- $x^n + y^n = z^n$ mit ganzzahligem x, $y \to 0$, $z \to x$ und ganzzahligem $n \neq 0$;
- $x^n + y^n = z^n$ mit ganzzahligem x, $y \to 0$, $z \to -x$ und geradem $n \neq 0$;
- $x^n + y^n = z^n$ mit ganzzahligem x, $y \to -x$, $z \to 0$ und ungeradem n.

Diese Lösungen scheiden wegen der Forderung, daß x, y und z jeweils positiv und ganzzahlig sein sollen, aus. Sie lassen sich jeweils mit der n-ten Potenz einer natürlichen Zahl, also mit w^n, durchmultiplizieren und sind damit unendlich viele verschiedene Lösungen (desselben Typs) für jedes ganzzahlige n und x.

Auch hier ist Null eine gerade Zahl und $0^0 = 1$, so daß $n \to 0$ auf gar keine Lösung führt.

Da die Lösung mit größtmöglicher Allgemeinheit bestimmt wurde, können weitere Lösungen der Aufgabenstellung nur noch vor den beiden Substitutionen gefunden werden. Dies ist in Abhängigkeit von n zu untersuchen.

2.9 Weitere Lösungstripel für n → 1

Für $n \to 1$ gilt, daß die Summe zweier natürlicher Zahlen auch eine natürliche Zahl ist:

$$x + y = z. \tag{18}$$

Dieser Fall gilt bereits zur Aufgabenstellung. Er ist deshalb von Fermat ausgenommen worden.

2.10 Weitere Lösungstripel für n → 2

Für $n \to 2$ ergibt sich nach der ersten Reduktion (13) folgende Einsicht:

$$x^2 = 2\,y\,b + b^2. \tag{19}$$

Auf der rechten Seite steht für $b \to 1$ eine ungerade Zahl. Ungerade Quadratzahlen existieren, nämlich die Quadrate aller ungeraden Zahlen.

Es ergibt sich also eine algebraische Lösung in y für positive ganzzahlige x:

$$\left\{x, y \to \frac{x^2 - b^2}{2\,b}, z \to \frac{x^2 + b^2}{2\,b}\right\} = \left\{x, y \to \frac{x^2}{2\,b} - \frac{b}{2}, z \to \frac{x^2}{2\,b} + \frac{b}{2}\right\}. \tag{20}$$

Auch hier ist beachtlich, daß das erste Lösungstripel mit $x \to b$ die Null enthält.

Lösungsbeispiele:

- $b = 1$: $5^2 - 4^2 = 3^2$, $13^2 - 12^2 = 5^2$, $25^2 - 24^2 = 7^2$, $41^2 - 40^2 = 9^2$, $61^2 - 60^2 = 11^2$ usw.
- $b = 2$: $5^2 - 3^2 = 4^2$, $10^2 - 8^2 = 6^2$, $17^2 - 15^2 = 8^2$, $26^2 - 24^2 = 10^2$, $37^2 - 35^2 = 12^2$ usw.

Für $b > 1$ gibt es reduzible und irreduzible Fälle, so dass nicht generell $b = 1$ gilt.

Irreduzible Lösungsbeispiele (für einige b sind alle Fälle reduzibel) sind:

- $b = 1$: $5^2 - 4^2 = 3^2$, $13^2 - 12^2 = 5^2$, $25^2 - 24^2 = 7^2$, $41^2 - 40^2 = 9^2$, $61^2 - 60^2 = 11^2$ usw.
- $b = 2$: $17^2 - 15^2 = 8^2$, $37^2 - 35^2 = 12^2$, $65^2 - 63^2 = 16^2$, $101^2 - 99^2 = 20^2$ usw.
- $b = 8$: $29^2 - 21^2 = 20^2$, $53^2 - 45^2 = 28^2$, $85^2 - 77^2 = 36^2$, $125^2 - 117^2 = 44^2$ usw.
- $b = 9$: $65^2 - 56^2 = 33^2$, $89^2 - 80^2 = 39^2$, $149^2 - 140^2 = 51^2$, $185^2 - 176^2 = 57^2$ usw.

Die irreduziblen Lösungsbeispiele entstehen vor allem, wenn b das Quadrat eines b ist, das bereits irreduzible Fälle erzeugte. Dies leuchtet unmittelbar ein, wenn der Vorfaktor $b = z - y$ aus der geometrischen Folge (6) betrachtet wird, der für $n = 2$ auf eine Quadratzahl führen soll.

Es ergeben sich also weitere Fälle, die bei der Beweisführung gerne übersehen werden, wenn z.B. $b = 1$ gesetzt wird. Die hier aufgeführten Beispiele mögen genügen, um zu zeigen, dass im allgemeinen Fall b nicht auf eine einzige Zahl reduzierbar ist.

Jeder Lösungstyp kann mit dem Quadrat einer natürlichen Zahl durchmultipliziert werden, was auf die vollständige Lösung der Aufgabe führt. Der Fall $n \to 2$ wurde ebenfalls von Fermat ausgenommen.

Für $n = 2$ kann festgehalten werden, dass die Suche nach *Pythagoräischen Zwillingen* ebenso interessant und unerwartet verläuft wie die Suche nach Primzahlen.

2.11 Unentscheidbares Problem?

Für $n > 2$ besteht die rechte Seite von Gleichung (13) aus mindestens drei Termen. Deshalb muss hier zur Erzeugung einer Potenzzahl der Binomische Lehrsatz angewendet werden.

Es ergibt sich eine bemerkenswerte Unklarheit bezüglich dieses Gedankengangs, so dass unter der Annahme, der Fermatsche Satz sei falsch, folgende Substitution hilfreich erscheint:

$$x^n \;\to\; z^n \;-\; y^n \tag{21}$$

Dies ist in Wirklichkeit eine Rücksubstitution, deren Lösung freilich auf $z = y + b$ führt, ohne dass damit etwas bewiesen ist. Es ist also offensichtlich nicht möglich, über einen Widerspruchsbeweis den Fermatschen Satz zu beweisen, sondern es ergibt sich folgender Umstand:

- Ist der Satz richtig, so ist das System konsistent.
- Ist der Satz falsch, so ist das System ebenfalls konsistent.

Die Vorstellung, dass die Annahme des Gegenteils zwingend in einen Widerspruch führen müsse, ist hier ganz offensichtlich irrig, denn der Fermatsche Satz ist für $n = 2$ durchaus falsch. Diese Lösungsmannigfaltigkeit ist aber in der algebraischen Formulierung (21) ebenfalls enthalten. Die Vorstellung von Gödel, das Problem als *unentscheidbar*[9] einzustufen, kann also zurück gewiesen werden: Eine unscharf gestellte Formulierung sagt nichts aus, auch nicht über die Entscheidbarkeit an sich.

Beim Fermatschen Satz geht es eigentlich nur um die Frage, ab wann für ganze Zahlen der Binomische Lehrsatz zur Vollendung einer verminderten Binomialsumme Anwendung finden muss. Dies ist für ganzzahlige $n > 2$ der Fall.

[9] [Göd1931], Anmerkung 61, Seite 196

2.12 Zusammenfassung

Deshalb gilt der *Fermatsche Satz*:

> „Es gibt keine natürlichen Zahlen x, y, z und n mit $n > 2$,
> die die Gleichung $x^n + y^n \;=\; z^n$ erfüllen.“

Das war zu zeigen (quod erat demonstrandum).

2.13 Ausblick

Für Interessierte sei erwähnt daß die folgenden *kubischen Drillinge* existieren:

$$3^3 + 4^3 + 5^3 \;=\; 6^3. \tag{22}$$

Ein Analogbeweis zum Fermatschen Satz erfolgt über eine dreifache Substitution einer Gleichung vierer Veränderlicher. Die Theoreme zum Umgang mit Dreifachsummen sind weniger geläufig.

3 Diskussion des Beweises

3.1 Motivation

Der vorgelegte Beweis ist erschreckend einfach und vergleichsweise kurz. Die Zweifel an der Vollständigkeit, speziell im Hinblick auf eventuell vergessene Lösungen, sind nicht für jeden Betrachter völlig eindeutig zu beseitigen. Deshalb sollen noch einige weitere Gesichtspunkte angesprochen werden.

3.2 Weitere Lösungstripel für n > 2 ?

3.2.1 Vorgehensweise

Die Suche nach weiteren Sonderfällen, wie sie vor der Bestimmungsgleichung (16) für $n \to 2$ herauskommen, ist immer wieder sehr beliebt. Deshalb sollen nun diejenigen algebraischen Ordnungen angegangen werden, die über die schon bekannten Cardanischen Lösungsformeln zu bewältigen sind:

3.2.2 Lösung für n → 3 und b → 1

Der einfachste Fall $n \to 3$ und $b \to 1$ ergibt:

$$x^3 \;=\; 3\,y^2 + 3\,y + 1. \tag{23}$$

Die dritte Wurzel aus diesem Term heiße x. Diese Aufgabenstellung führt bei ganzzahligem y auf die bereits abgehandelte Einsicht $y^3 \;=\; -x^3$.

Um hier analog zum Fall $n \to 2$ vorzugehen, ergeben sich folgende Lösungen für y:

$$y \to -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{6}\sqrt{12\,x^3 - 3}\,. \tag{24}$$

Für $x \to 1$ ergibt sich eine Quadratzahl unter der Wurzel, sonst nicht. Beide Lösungsmöglichkeiten wurden bereits behandelt.

3.2.3 Lösung für n → 4 und b → 1

Der Fall $n \to 4$ und $b \to 1$ ergibt:

$$x^4 \;=\; 4\,y^3 + 6\,y^2 + 4\,y + 1. \tag{25}$$

Die Lösung ergibt mit $\textbf{Wurzel} \;=\; \sqrt[3]{27\,x^4 + 3\sqrt{81\,x^8 + 3}}$:

$$y_1 \quad\to\quad \frac{1}{6}\left(-3 - \frac{3}{\textbf{Wurzel}} + \textbf{Wurzel}\right), \tag{26}$$

$$y_{2,3} \quad\to\quad \frac{1}{6}\left(-3 + \frac{3\left(1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}\right)}{2\,\textbf{Wurzel}} - \frac{\left(1 \mp \mathrm{i}\sqrt{3}\right)\textbf{Wurzel}}{2}\right). \tag{27}$$

Ein rationales Lösungstripel existiert für $x \to 0$ mit $\textbf{Wurzel} \;=\; \sqrt{3}$:

$$y_1 \to -\frac{1}{2}\,, \qquad y_{2,3} \to -\frac{1}{2} \pm \frac{\mathrm{i}}{2}. \tag{28}$$

Diese spezielle Lösung kann mit $2^4 \;=\; 16$ durchmultipliziert werden und ist dann ganzzahlig. Das Ergebnis ist nicht neu:

$$2^4\left(0^4 + \left(-\frac{1}{2}\right)^4\right) \;=\; 2^4\left(\frac{1}{2}\right)^4. \tag{29}$$

Eine ganzzahlige Lösung ergibt sich an der bekannten Stelle für $x \to \pm 1$, wo die Substitution $\textbf{Wurzel} \to \sqrt[3]{27 + 6\sqrt{21}}$ und somit $y \to 0$ gilt.

Die Theoreme zur Vereinfachung dritter Wurzeln sind derart wenig ausgereift, daß über numerische Werteberechnung zum Ziel zu kommen ist. Die korrekte Lösung erfüllt die folgende quadratische Gleichung (26) in **Wurzel** und kann dadurch überprüft werden:

$$0 \;=\; \frac{1}{6}\left(-3 - \frac{3}{\textbf{Wurzel}} + \textbf{Wurzel}\right). \tag{30}$$

Die Lösung dieser quadratischen Gleichung führt auf die Identität:

$$\textbf{Wurzel} \;=\; \sqrt[3]{27 + 6\sqrt{21}} \;=\; \frac{3 + \sqrt{21}}{2}. \tag{31}$$

Die bereits vorgestellten Ergebnisse für gerade n bleiben erhalten.

3.2.4 Lösung für n → 5 und b → 1

Für $n \to 5$ und $b \to 1$ ergibt sich:

$$x^5 \;=\; 5\,y^4 + 10\,y^3 + 10\,y^2 + 5\,y + 1. \tag{32}$$

Hier führt die mit $y \to u - \frac{1}{2}$ reduzierte Gleichung lediglich auf eine biquadratische Gleichung:

$$x^5 \;=\; 5\,u^4 + \frac{5}{2}\,u^2 + \frac{1}{16}. \tag{33}$$

Die vier Lösungen der Gleichung (32) in y sind:

$$y \to -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{-5 \pm 2\sqrt{20\,x^5 + 5}}}{2\sqrt{5}}. \tag{34}$$

Hier kommen nur Quadratwurzeln im Ergebnis vor, wodurch $x \to 1$ völlig sicher die einzige ganzzahlige Lösung ist:

$$y_1 = 0 \qquad y_2 = -1 \qquad y_{3,4} = -\frac{1}{2} \pm \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{35}$$

Diese Ergebnisse sind nicht neu, unterstreichen aber für Zweifler die Vollständigkeit des vorgelegten Beweises.

3.3 Kann man *Unmöglichkeit* mathematisch beweisen?

Der Unmöglichkeitsbeweis des Fermat besteht vor allem im Nachweis der Null, wodurch nicht drei, sondern nur zwei Zahlen wirklich gesucht wären. Fermat tat gut daran, diese Mehrdeutigkeit durch die Vorgabe zu beseitigen, daß nur natürliche Zahlen gesucht sind.

Sollen tatsächlich drei Zahlen gesucht werden, so existiert die Lösung schon, allerdings als irrationale Zahl.

Beim Umgang mit Unmöglichkeitsbeweisen ist immer Vorsicht geboten, da doch allzu schnell der eine oder andere Fall übersehen werden mag.

Bei algebraischen Gleichungen n-ter Ordnung gibt es nur n verschiedene Lösungen. Dieser Umstand kann genutzt werden, um etwa die n verschiedenen Einheitswurzeln konkret anzugeben.

Die n-ten Einheitswurzeln lauten $\exp\left(\frac{2\,\mathrm{i}\,\pi\,\mu}{n}\right)$ mit $\mu \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, n-1\}$. Es sind immer n Einheitswurzeln. Damit kann der *Fundamentalsatz der Algebra* bewiesen werden, wonach wegen der Umstellungsmöglichkeit von der Art

$$y^n \;=\; -\sum_{\mu=0}^{n-1} a(\mu)\,y^\mu \tag{36}$$

auch für beliebige komplexwertige Polynomkoeffizienten $a(\mu)$ aus einem normierten Polynom n-ten Grades nur n Wurzeln (einer komplexen Zahl) resultieren können. Die Lösung einer algebraischen Gleichung bedeutet, daß es möglich war, Wurzeln niedrigerer Ordnung jeweils (für jede Ordnung) zu einer eindeutigen komplexen Zahl zusammenzufassen.

Auch der *Fundamentalsatz der Algebra* läßt sich für natürliche n in der Form:

> „Es ist unmöglich, mehr als n Wurzeln aus einem Polynom n-ten Grades zu ziehen.“

formulieren. In Wirklichkeit aber beweist dieser Satz die Existenz von n komplexen Wurzeln, die auch zusammenfallen dürfen.

Als Konsequenz aus dieser Betrachtung kann formuliert werden, daß Unmöglichkeit nur da als bewiesen angesehen werden sollte, wo die Eigenschaften von Lösungsweg oder Lösung so gut bekannt sind, daß sie nicht mit den vorgegebenen Methoden oder einem entsprechend eingeschränkt vorgegebenen Ergebnishorizont (zum Beispiel: nur natürliche Zahlen) vereinbar sind.

Ein Unmöglichkeitsbeweis sollte nie so verstanden werden, daß eine Begegnung mit einer überraschend doch aufgetretenen Lösungsmöglichkeit bekämpft wird. Derartige Begegnungen tragen vielmehr zu einer gesunden Erschütterung ganzer Denksysteme bei, damit diese von Trugschlüssen befreit werden können.

Diese Abhandlung etwa soll helfen, einen lange gesuchten Beweis als trotzdem einfach einzustufen. Der Verfasser (nicht der Hellste) benötigte fast zwölf Jahre zum Durchbruch und fast weitere sechs Jahre zum Verständnis zu diesem frappierend einfachen Beweis.

3.4 Tips zur Beweisführung

Werden Untermengen der komplexen Zahlen in der Formulierung eines Satzes explizit genannt, so sind folgende Zusammenhänge beim Versuch eines Beweises hilfreich:

- Die algebraische Umformung ist meist auf komplexwertige Terme anwendbar.
- Für rationale Potenzen sind mehrere Wurzeln (entsprechend dem durchgekürzten Nenner der Potenz) bekannt, für reelle Potenzen p sind es $-[-|p|]$[10] Wurzeln.
- Die Primfaktoren–Zerlegung ist nur für ganze reelle Zahlen eindeutig[11].
- Viele mathematische Sätze und Umformungen gelten nur für Untermengen der komplexen Zahlen.
- Ganze Zahlen sind entweder gerade oder ungerade, irrationale Zahlen wie $\sqrt{2}$ keins von beiden.

4 Dank

Diese Arbeit wurde durch niemanden finanziert und ist somit eine allgemein zugängliche Quelle nach dem deutschen GG, Art. 5. Der Verfasser dankt Herrn Andreas Kempf (Bad Schussenried) für die Korrektur einer Verständnishürde und Herrn Professor Dr. Bodo Volkmann (Stuttgart) für den Hinweis auf die irreduziblen Fälle für $b > 1$.

[10] Die Gaußsche Klammer–Funktion $[z]$ führt auf die nächst kleinere ganze Zahl $[z] \leq z$.
[11] z.B. ist $2 = (1 + \mathrm{i})\,(1 - \mathrm{i})$ keine Primfaktoren–Zerlegung – oder doch?

A Eindeutigkeit der Eulerschen Gamma–Funktion

Die Terme der Eulerschen Gamma–Funktion $\Gamma(n)$ interpolieren die Fakultätformel $n! = \Gamma(n+1)$ und erfüllen folgende Differenzengleichung:

$$\Gamma\,(n+1) \;=\; n\,\Gamma\,(n)\,. \tag{37}$$

Wegen des für alle komplexwertigen z gültigen *Ergänzungssatzes*

$$\Gamma\,(z)\;\Gamma\,(1-z) \;=\; \frac{\pi}{\sin\,(\pi\,z)} \tag{38}$$

erfüllt die Eulersche Gamma–Funktion das *Abtasttheorem* [Mar1986][12]:

> „Die minimale Periode einer Interpolationsfunktion ist größer oder gleich dem doppelten Abstand äquidistander Stützpunkte“,

wodurch eine *Hauptlösung* [Mes1959][13] der Differenzengleichung (37) vorliegt – hier wird der Abstand Eins zwischen zwei ganzen Zahlen verwendet:

$$\frac{\pi}{\sin\,(\pi\,z)} \;=\; \frac{\pi}{\sin\,(\pi\,(z\pm 2))}. \tag{39}$$

Die minimale Periode dieses Produktes ist in der Tat Zwei.

Dadurch kann die $\Gamma\,(z)$–Funktion nicht eine Periode kleiner als Zwei besitzen, wodurch die Fakultätformel mit $z! = \Gamma\,(z+1)$ bestmöglich für alle komplexwertigen z interpoliert wird.

Somit gilt Gleichung (11) auch für alle komplexwertigen n und μ.

Literatur

[BrS1987] Bronstein I. N., Semendjajew K. A., *Taschenbuch der Mathematik*, Gemeinschaftsausgabe Verlag Nauka, Moskau und BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 23. Auflage, (1987)

[Enc1997] *Microsoft(R) Encarta(R) 98 Enzyklpädie*, Deutsche Fassung, Microsoft Corporation, (1997)

[Göd1931] Gödel K., *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I*, Monatshefte für Mathematik und Physik (**38**), (1931), 173–198

[Lex1953] *Lexikon A-Z in einem Band*, VEB Bibliographisches Institut, Leipzig, (1953)

[Mar1986] Marko H., *Methoden der Systemtheorie*, Springer Verlag, Berlin etc., 2. überarbeitete Auflage, (1986)

[Mes1959] Meschkowski H., *Differenzengleichungen*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, (1959)

[Oli1995] Olivastro D., *Das chinesische Dreieck*, Droemersche Verlagsanstalt Th. Knaur Nachf., München, (1995)

[12] Abschnitt 6.1, Seite 130–131

[13] Kapitel III, Fußnote auf Seite 41