P O T E N Z - S U M M E N   U N D   I H R E   B E R E C H N U N G

B E S C H R E I B U N G :

- Ein Versuch, eine Übersicht zur Berechnung von Potenz-Summen zu schaffen.
- Eine Studie, die Mut zu ungewöhnlichen mathematischen Lösungswegen und Beweisführungen machen soll.

I N H A L T :

Q U E L L E N - A N G A B E N :

- Bronstein-Semendjajew: Taschenbuch der Mathematik, Teubner Leipzig, 21.Auflage 1982; Druck 1987
- Vorlesungs-Manuskript der Vorlesung 'Höhere Mathematik für Physiker' von Dr. Uwe A. Pittelkow, Universität Ulm
- Jakobusbrief, Kap.1,5-8 und Psalm 119,99

W I C H T I G E   H I N W E I S E :

- Diese Ausarbeitung soll nicht als mathematisch "schußfest" verstanden werden, sondern neue Anregungen für die mathematische Forschung liefern.
- Es wurden auch Formeln und Ansätze aufgenommen, die N I C H T unbedingt stimmen müssen. Daher dürfte eine gewisse Skepsis bei dem Durchlesen der vorliegenden Ausarbeitung sehr zu empfehlen sein.

- Diese Abhandlung ist für S I G R U N   P A B S T als kleines Andenken an die Übungen zu 'Höhere Mathematik für Physiker III' im Semester 91/92 an der Universität Ulm gedacht.

D I E   Ü B U N G E N   H A B E N   I M M E R   S P A S S   G E M A C H T !!

B E A R B E I T U N G (19. 2. 1992 bis 8. 4. 1992) :

- Tobias Rehfeld, Heidenheim
- Norbert Südland, Aalen

EINLEITUNG

Was ist eine Potenz-Summe ?

Im vielgerühmeten Nachschlagewerk "Bronstein" existiert kein Stichwort mit der Bezeichnung "Potenz-Summe".
Die Bezeichnung ist also kein Standard, sondern frei erfunden, um dem entsprechenden mathematischen Gebilde einen lesbaren Namen zu verpassen.

Wie der Name schon verrät, handelt es sich um die Summe von Potenz-Zahlen.
Etwas derartiges ist bisher vor allem unter dem Namen "geometrische Folge" (vgl. z.B. Bronstein S.114; Nr.2.3.2 Ende) bekannt, stellt aber nur einen Teil der Summierungsmöglichkeiten von Potenzzahlen dar:

Die geometrische Folge lautet:

$$\sum_{v=0}^{n} q^{v} = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

Diese Formel ist schon lange bekannt.

Ganz anders ist es dagegen, wenn statt dem Exponenten die Potenzbasis 'hochgezählt' wird:

$$\sum_{v=1}^{n} v^{\mu} = ???????????$$

Dieses "Ungetüm" soll nun also den Namen "Potenz-Summe" erhalten, da der Name "Potenz-Reihe" schon für einen anderen Formel-Komplex vergeben ist.
Sind die μ natürliche Zahlen oder auch $\mu = 0$, so soll die Summe "natürliche Potenz-Summe" heißen.

Zur Berechnung einer (im allgemeinen endlichen) Potenz-Summe benötigt man vor allem genügend Zeit. Danach sind alle Fragen über die Berechnung eines Spezialfalls durch eine lange Tabelle etc. beantwortbar...
So macht das Ganze natürlich keine Freude - schließlich will man doch eine schöne kurze Formel kennen, in die man für jedes 'μ' nur noch das fragliche 'n' einsetzt und sich so V I E L Zeit gespart hat.

Bisherige Berechnungs-Ansätze

Für einige Spezialfälle existieren auch tatsächlich Lösungen, die nur noch 'n' enthalten (vgl. z.B. Bronstein S.114, Nr.2.3.3):

$$\mu = 0 : \qquad \Sigma = n$$

$$\mu = 1 : \qquad \Sigma = \frac{n \bullet (n + 1)}{2} \stackrel{!}{=} \binom{n+1}{2}$$

$$\mu = 2 : \qquad \Sigma = \frac{n \bullet (n + 1) \bullet (2 \bullet n + 1)}{6}$$

$$\mu = 3 : \qquad \Sigma = \frac{n^2 \bullet (n + 1)^2}{4} \stackrel{!}{=} \binom{n+1}{2}^2$$

$$\mu = 4 : \qquad \Sigma = \frac{n \bullet (n + 1) \bullet (2 \bullet n + 1) \bullet (3 \bullet n^2 + 3 \bullet n + 1)}{30}$$

Es existiert noch ein Satz (Bronstein S.113 unten):
"Ist (a_i) eine arithmetische Folge der Ordnung m, so gibt es ein Polynom in i vom Grad m, so daß für alle $i \in \{ 1 , ... , n \}$ gilt: $a_i = P_m(i)$."
Dies ist ein schwacher Trost. Auch die Interpolationsformeln auf S.756 unter der Nr. 7.1.2.6.1 helfen hier wenig weiter:
Man muß eben jeden Koeffizienten des Lösungs-Polynoms mithilfe des Ansatzes "zu Fuß" berechnen. Wer will außerdem immer noch zuerst überprüfen, ob die fragliche Potenz-Summe überhaupt eine arithmetische Folge endlicher Ordnung ist? Aus der Tatsache, daß keine Gegenbeispiele existieren, kann leider nicht allzu viel geschlossen werden.

Besonders die letzte der obigen Formeln läßt erahnen, daß eine allgemeine Lösungsformel für alle natürlichen 'μ' interessant aussehen könnte...
Darum wird dieses Thema im Bronstein nicht weiter bearbeitet (es war auf die Schnelle zumindest nicht allzuviel dazu aufzutreiben).

Glücklicherweise gibt es auch Mathematiker, die über das, was Bronstein bietet, hinausgehen und weitere Ansätze veröffentlichen, z.B. Dr. Uwe A. Pittelkow in "Höhere Mathematik für Physiker" (wo er diese Ideen und Formeln her hat, hat er nicht verraten - man kann ihn ja auch selbst fragen...) an der Universität Ulm:

Dort mutet er den Physik-Anfängern am zweiten Tag der Mathematik-Vorlesung gleich einen besonders genialen Ansatz zur Lösung der Potenz-Summen zu (Die Studenten glauben's genauso wie alles andere und merken erst viel später, daß Herr Pittelkow auch weiß, was Bronstein nicht mehr weiß):

Der Trick ist folgender:

Die Summe $\sum_{\nu=1}^{n} \left[(\nu+1)^k - \nu^k \right]$ wird auf zwei verschiedene Weisen berechnet,

einmal als Teleskopsumme, das andere Mal mit dem Binomischen Lehrsatz und dem Vorführen des Summen-Vertauschens. Das zweite Verfahren läßt dann als innere Summe eben jene berüchtigte Potenz-Summe zurück, und es folgt:

$$(n+1)^k - 1 \overset{!}{=} \sum_{\mu=0}^{k-1} \binom{k}{\mu} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\mu}$$

Dieses Ergebnis wird nun als Rekursionsformel für die noch zu berechnenden Potenz-Summen $S_\mu(n)$ interpretiert:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\mu} = S_\mu(n) = \frac{(n+1)^{\mu+1} - 1}{\mu + 1} - \sum_{\nu=0}^{\mu-1} \binom{\mu+1}{\nu} \cdot \frac{S_\nu(n)}{\mu + 1}$$

Mit dieser Formel rechnet sich's schon sehr viel angenehmer als "zu Fuß", da man auf das Bruchrechnen weitestgehend verzichten kann. Außerdem entfällt das lästige Prüfen, ob auch diese Potenz-Summe noch arithmetisch ist - diese Frage spielt hier überhaupt keine Rolle !!!

Trotzdem hat jede Rekursionsformel den Beigeschmack des Unvollkommenen. Es bleibt also die gewisse Hoffnung, daß es "irgendwie" doch noch einfacher gehen muß. Derartige Wünsche können aber sicher nicht als Existenzbeweis verstanden werden - sie sind vielmehr der Antrieb zu neuen mathematischen "Experimenten".

DIE ALLGEMEINE LÖSUNG FÜR NATÜRLICHE POTENZ-SUMMEN

Der entscheidende Ansatz

Es gibt ein einfaches Prinzip, das lautet:
"Wenn etwas in einer Richtung nicht klappt, probiert man eben am anderen Ende."

Hier im konkreten Fall sieht das so aus:
Laut Bronstein (siehe oben) existiert zu J E D E R arithmetischen Folge ein entsprechendes Polynom, das dasselbe Ergebnis liefert.
Nun dreht man diesen Satz einfach um:
Da bei endlichen Polynomen eine beliebige Umsummierung möglich ist, muß auch jedes Polynom als Linear-Kombination entsprechender arithmetischer Folgen dar= stellbar sein.

Ein mathematischer Beweis hierzu ist sicher sehr umständlich und genauso un= nötig, da die Konstruktion der Umsummierung gleichbedeutend damit ist, daß ein Term von z.B. der linken Seite einer Gleichung auf die rechte Seite geschoben wird. Es ist schade, daß diese Art von kombinatorischer bzw. konstruktiver Be= weisführung (im Sinne: die Eigenschaften der Konstruktion ergeben die gewünsch= ten Effekte) in der Mathematik immer noch nicht so richtig anerkannt ist.

Eine gekonnte Konstruktion hat nichts mit Unexaktheit oder Schlamperei zu tun, sondern ist lediglich ein willkommenes Mittel, um bereits bekannte Sätze und Definitionen so geschickt zu kombinieren, daß ein rechentechnischer Beweis ent= fällt.

Wie dem auch sei - der Satz von der Darstellbarkeit eines Polynoms n-ten Grades durch eine endliche Linearkombination arithmetischer Folgen von n-ter und nied= rigerer Ordnung gilt in diesem Zusammenhang ab sofort als richtig.

Weiter kann nun gefolgert werden, daß J E D E S Polynom v^n, bei dem v und n natürliche Zahlen sind, eine arithmetische Folge darstellt.
Aufgrund der Konstruktion einer Potenz-Summe muß diese selbst auch eine arith= metische Folge (n+1)-ter Ordnung sein. Die Summe von Potenz-Summen ist wieder eine arithmetische Folge (n+2)-ter Ordnung usw. ...
Also ist die k-fache Summe über eine Potenz-Folge, deren Exponent 'μ' ist, eine arithmetische Folge $(k+\mu)$-ter Ordnung !!!

Gleichzeitig ist eine Potenz-Summe, da sie eine arithmetische Folge darstellt, als Polynom und damit wiederum als Linear-Kombination anderer arithmetischer Folgen darstellbar.

Es bleibt nun also die Suche nach einer arithmetischen Folge p-ter Ordnung, deren Berechnung sehr einfach ist, und die als "Norm-Folge" angesehen werden kann (Der Ansatz mit den Polynomen ging ja nicht so gut - siehe oben).

Hierzu bietet sich das Pascal'sche Dreieck förmlich an:
'Legt' man das Pascal'sche Dreieck auf seine linke Seite, so daß als unterste Zeile eine lange Folge mit 1 steht, so erkennt man aufgrund der Definition der Binomial-Koeffizienten sofort, daß lauter arithmetische Folgen wachsender Ord= nung, die allesamt mit 1 beginnen, übereinader liegen, z.B.:

				1		5		15		35		70		126		210		330	
			1		4		10		20		35		56		84		120		165
		1		3		6		10		15		21		28		36		45	
	1		2		3		4		5		6		7		8		9		10
1		1		1		1		1		1		1		1		1		1	

Die Berechnung über die Formel:

$$\left[\begin{matrix} n \\ v \end{matrix}\right] = \frac{n\,!}{(n-v)\,!\cdot v\,!}$$

ist selbstverständlich auch hier möglich.
Die Symmetrie-Eigenschaften der Binomial-Koeffizienten und vieles andere mehr sind ebenfalls längst bekannt.

Unterschiede zu anderen arithmetischen Folgen sind:
- Die Basis der Folgen (d.h. die unterste Folge) kann um einen natür= lichen Faktor 'f' von 1 verschieden sein.
- Der Startwert einer Folge höherer Ordnung muß nicht 1 sein - er darf prinzipiell jede Zahl (auch '0') sein.

(Dies ist eine andere Darstellung der Aussage, daß sich J E D E arithmetische Folge als Linearkombination anderer arithmetischer Folgen gleicher und niedri= gerer Ordnung darstellen läßt.)

Die Systematisierung des Ansatzes

Es ergibt sich also für jede arithmetische Folge p-ter Ordnung der Ansatz:

$$\sum_{v=0}^{n} \text{Ausdruck} = \sum_{v=0}^{p} a(v) \cdot \binom{n}{v} \qquad (1)$$

Zur Bestimmung der konstanten Koeffizienten a(v) geht man so vor:
- Man rechnet die Folge für die ersten (p + 1) Glieder "zu Fuß" aus und schreibt die Ergebnisse mit wachsendem 'n' von z.B. links nach rechts auf.
- Nun bildet man durch Differenzen-Bildung ein Dreieck unter die Folge p-ter Ordnung und erhält so eine Kette bis zur Basis-Folge (diese ist immer eine arithmetische Folge 0-ter Ordnung, d.h. alle Zahlen sind gleich).
- Die linke Seite des sich ergebenden Dreiecks wird als jeweiliger Startwert der entsprechenden arithmetischen Folge interpretiert:
- Der Startwert der Folge p-ter Ordnung ist dann bereits a(0) - dieser Wert ist ja für n = 0 der einzige Wert, der interessiert.
- Der Startwert der Folge (p-1)-ter Ordnung ist völlig analog dazu a(1).
- Der Startwert der Folge (p-v)-ter Ordnung ist darum auch a(v).

Damit lassen sich alle Koeffizienten recht schnell und sicher bestimmen.

Beispiele (vgl. Bronstein S.114; Nr.2.3.3.):

```
(2)      p      2p+1     3p+3   4p+6
            p+1      p+2     p+3
                  1        1
                      0
```

Also: $$\sum_{v=0}^{n} (p+v) \overset{!}{=} p \cdot \binom{n}{0} + (p+1) \cdot \binom{n}{1} + 1 \cdot \binom{n}{2}$$

$$= \frac{2 \cdot p + 2 \cdot (p+1) \cdot n + n \cdot (n-1)}{2} = \frac{(n+1) \cdot (2 \cdot p + n)}{2}$$

```
(3)      0        1        4        9
             1        3        5
                  2        2
                      0
```

Also: $$\sum_{v=1}^{n} (2 \cdot v - 1) \overset{!}{=} 0 \cdot \binom{n}{0} + 1 \cdot \binom{n}{1} + 2 \cdot \binom{n}{2}$$

$$= 0 \cdot 1 + 1 \cdot n + 2 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot n \cdot (n-1) = n + n^2 - n = n^2$$

```
(4)     0       2       6       12
            2       4       6
                2       2
                    0
```

Also: $$\sum_{v=1}^{n} 2 \cdot v \overset{!}{=} 0 \cdot \binom{n}{0} + 2 \cdot \binom{n}{1} + 2 \cdot \binom{n}{2}$$

$$= 0 \cdot 1 + 2 \cdot n + 2 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot n \cdot (n - 1) = 2 \cdot n + n^2 - n \quad = \quad n \cdot (n + 1)$$

```
(5)     0       1       5       14      30
            1       4       9       16
                3       5       7
                    2       2
                        0
```

Also: $$\sum_{v=1}^{n} v^2 \overset{!}{=} 1 \cdot \binom{n}{1} + 3 \cdot \binom{n}{2} + 2 \cdot \binom{n}{3}$$

$$= \frac{3 n + 12 n^2 - 12 n + 2 n (n - 1) (n - 2)}{6} = \frac{n (n + 1) (2 n + 1)}{6}$$

Die anderen Formeln auf S.114 stimmen ebenfalls mit dem Ansatz überein (Beweis ist elementare Rechnung).

Falls jemand bis hierhin die Richtigkeit dieses Ansatzes anzweifeln will, sei er auf die "Newton'sche Interpolations-Formel für äquidistante Stützstellen" (vgl. Bronstein S.758; Nr.7.1.2.6.1. - möglicherweise wird das auf S.114 ange=sprochen ???) verwiesen:

Als Funktion f(x) wähle man ein Polynom - oder eine Summe darüber, die ja wieder ein Polynom ist - und beachte, daß die (n+1)-te Ableitung eines Polynoms n.Grades immer '0' ist. Dann ist man genauso weit wie mit dem direkten und an=schaulichen Ansatz - man kann bei Newton eher noch für nicht-natürliche Potenz-Summen weitere Folgerungen ziehen.

Es ist schon sehr schön, wenn andere Leute die Arbeit des Beweisens schon erle=digt haben...

Die Erfindung der Potential-Koeffizienten

Für die Berechnung der natürlichen Potenz-Summen ergibt sich spätestens über die Newton'sche Interpolationsformel die allgemeine Formel:

$$\sum_{v=0}^{n} v^{\mu} = \sum_{v=0}^{p} \begin{bmatrix} n \\ v+1 \end{bmatrix} \cdot \left\langle \begin{matrix} \mu \\ v \end{matrix} \right\rangle$$

mit:

$$\left\langle \begin{matrix} \mu \\ v \end{matrix} \right\rangle = \sum_{p=0}^{v} (-1)^{p+v} \cdot \begin{bmatrix} v \\ p \end{bmatrix} \cdot (1+p)^{\mu}$$

Die untere Summe ist praktisch eine ausformulierte Version der Vorwärtsdiffe= renzen (vgl. Bronstein S.757).
In der oberen Summe steht im Binomial-Koeffizienten 'v + 1', da der Startwert der Potenz-Summe selbst immer 0 ist (vgl. obige Beispiele).

Zur Benennung des neuen Koeffizienten wird vorerst willkürlich festgelegt:
{:} heiße Potential-Koeffizient, da diese Konstanten zur Berechnung von Potenz-Summen stets auftauchen.
Zur Unterscheidung von den Binomial-Koeffizienten (:) werden die Potential-Koeffizienten in geschweifte Klammern geschrieben.
Aussprache: "v unter µ" bzw. "µ auf v"
- vielleicht fällt irgendwem etwas Besseres ein.
Eine endgültige Benennung sollte sicherlich in einem größerem Rahmen, als ihn diese Abhandlung darstellt, geklärt werden.
(Es ist ebenfalls noch unklar, ob die Schreibweise für Binomial-Koeffizienten immer die heutige bleiben wird, da Verwechslungen mit Vektoren in der Linearen Algebra möglich sind.)

Die allgemeine Formel (2) ergibt sich somit für natürliche Potenzsummen:

$$\sum_{v=0}^{\mu} \begin{bmatrix} n \\ v+k \end{bmatrix} \cdot \left\langle \begin{matrix} \mu \\ v \end{matrix} \right\rangle = \begin{cases} 0 & n < k \\ \displaystyle\sum_{a1=k}^{n} \sum_{a2=k-1}^{a1} \cdots \sum_{v=1}^{a(k-1)} v^{\mu} & 0 \le k \le n \\ (n+1)^{\mu} & k = 0 \\ \displaystyle\sum_{v=0}^{|k|} (-1)^{v+|k|} \begin{bmatrix} |k| \\ v \end{bmatrix} (n+v+1)^{\mu} & -\mu \le k \le 0 \\ \mu\,! & k = -\mu \\ 0 & k < -\mu \end{cases}$$

Der Beweis

Der Beweis wurde schon erbracht, da die Formel (2) im wesentlichen die Eigenschaften einer arithmetischen Folge beschreibt, der Rest der Formel folgt aus der Newton'schen Interpolationsformel und dem Satz von Bronstein S.113.

Eine Vollständige Induktion der Formel oder ein direkter Beweis etc. ist (leider) bisher gescheitert.

Untersucht man die Eigenschaften der Potential-Koeffizienten selbst, so hofft man natürlich auf ein ähnliches Bildungsgesetz, wie dies für Binomial-Koeffizi= enten existiert.
Dabei findet sich folgende Formel:

$$\left\langle \begin{bmatrix} \mu + 1 \\ v + 1 \end{bmatrix} \right\rangle = (v + 1) \cdot \left\langle \begin{bmatrix} \mu \\ v \end{bmatrix} \right\rangle + (v + 2) \cdot \left\langle \begin{bmatrix} \mu \\ v + 1 \end{bmatrix} \right\rangle \qquad (3)$$

Diese Formel ist zunächst einmal eine empirische Vermutung und bedarf daher - im Gegensatz zur oben dargelegten Formel - wirklich eines ordentlichen Bewei= ses.
Die vollständige Induktion ist hier zwar möglich, aber doch umständlich.
Einfacher ist dagegen der direkte Beweis unter Verwendung der Definitions-For= mel für die Potential-Koeffizienten:

$$(v+1) \cdot \sum_{p=0}^{v} (-1)^{p+v} \cdot \begin{bmatrix} v \\ p \end{bmatrix} \cdot (1+p)^{\mu} + (v+2) \cdot \sum_{p=0}^{v+1} (-1)^{p+v+1} \cdot \begin{bmatrix} v+1 \\ p \end{bmatrix} \cdot (1+p)^{\mu}$$

$$= \sum_{p=0}^{v+1} (-1)^{p+v+1} \cdot (1+p)^{\mu+1} \cdot \left[\frac{-\,(v+1) \cdot v\,!}{p\,! \cdot (v-p)\,! \cdot (1+p)} + \frac{(v+2) \cdot (v+1)\,!}{(p+1)\,! \cdot (v+1-p)\,!} \right]$$

$$= \sum_{p=0}^{v+1} (-1)^{p+v+1} \cdot (1+p)^{\mu+1} \cdot \left[- \begin{bmatrix} v+1 \\ p+1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v+2 \\ p+1 \end{bmatrix} \right]$$

$$= \sum_{p=0}^{v+1} (-1)^{p+v+1} \cdot \begin{bmatrix} v + 1 \\ p \end{bmatrix} \cdot (1 + p)^{\mu} \overset{!}{=} \left\langle \begin{bmatrix} \mu + 1 \\ v + 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Damit ist der einzige wirklich interessante Beweis erbracht.
Erwähnenswert ist in diesem Zusammenhang, daß die Formel (3) auch dann gilt, wenn 'μ' eine reelle Zahl ist, da ja nur mit Binomial-Koeffizienten han= tiert wird.
Die Darstellung eines Binomial-Koeffizienten muß sich hierfür nur geringfügig ändern, am Beweis selbst ändert sich dadurch aber nichts - insofern ist dieser Beweis hier formal nicht ganz korrekt.

Falls 'v' auch eine reelle Zahl sein soll, so sollte in Analogie zum Binomi= schen Lehrsatz eine unendliche Summe, also eine (hoffentlich ?) konvergente Reihe gesucht werden - vielleicht geht's ja auch ganz anders ???
Formel (1) und (2) können nur für natürliche 'μ' einschließlich '0' angewandt werden, da sonst die Eigenschaft der arithmetischen Folge verloren geht.

Folgerungen für allgemeinere Anwendungen

Will man die k-fache Summe über ein Polynom bilden, so gibt es 2 gangbare Wege:

- Man bestimmt die zugehörigen Koeffizienten über das Differenzen-Dreieck über elementare Rechnung.
- Man teilt das Polynom in mehrere Potenz-Summen auf und setzt die bekannten Ergebnisse zusammen.

Welcher dieser Wege schneller zum Ziel führt, muß experimentell geklärt werden.

Die Potential-Koeffizienten haben einige weitere Eigenschaften:

$$\left\langle \begin{bmatrix} \mu \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = 1 \qquad \text{für alle reellen '}\mu\text{'} \qquad (4)$$

Dies erhält man durch explizites Einsetzen ohne jede Probleme.

$$\left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix} \right\rangle = \begin{cases} 0 & \text{für alle ganzen } v \neq 0 \\ 1 & \text{für } v = 0 \end{cases} \qquad (5)$$

Für reelle 'v' müssen die Potenz zu einer negativen Basis und die Binomial-Koeffizienten, deren "obere" Zahl negativ ist, erst noch definiert werden - falls möglich. Ein erster Schritt in diese Richtung ist Formel (8) .

$$\left\langle \begin{bmatrix} \mu \\ \mu \end{bmatrix} \right\rangle = \mu\,! \qquad (6)$$

Dies kann mit Vollständiger Induktion und Formel (3) für alle natürlichen 'μ' gezeigt werden.
Die Frage, inwieweit die Formel auch für reelle 'μ' gilt und somit eine spezi= elle Form der 'Γ(x) - Funktion' ist, muß getrennt untersucht werden.

$$\sum_{v=0}^{\mu} (-1)^{v} \cdot \left\langle \begin{bmatrix} \mu \\ v \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \qquad (7)$$

Diese Formel ergab sich rein empirisch und ist eine herrliche "Check-Summe" bei der Berechnung des Potentialdreiecks. Hier M U S S 'μ' natürliche Zahl sein !
Wer Lust hat, kann die Formel ja 'mal mit vollständiger Induktion unter Verwen= dung von Formel (3) beweisen - vielleicht geht das gut ???

Weitere Folgerungen:

Da das Pascal'sche Dreieck als arithmetische Folge betrachtet werden kann, muß es auch Binomial-Koeffizienten "n über v" zu negativen 'n' geben:
Die Basis einer arithmetischen Folge besteht N U R aus identischen Zahlen !

15		5		1		0						0		1		5		15	
	−10		−4		−1		0				0		1		4		10		20
10		6		3		1		0		0		1		3		6		10	
	−4		−3		−2		−1		0		1		2		3		4		5
1		1		1		1		1		1		1		1		1		1	
	0		0		0		0		0		0		0		0		0		0
:		:		:		:		:		:		:		:		:		:	
:		:		:		:		:		:		:		:		:		:	
	0		0		0		0		0		0		0		0		0		0

Diese Eigenschaft ist mit der Definition der Binomial-Koeffizienten unter Verwendung der '$\Gamma(x)$ - Funktion' ebenfalls zu erwarten, wenn man die Beträge richtig setzt.
Die linke Seite des "Dreiecks" ist bei der allgemeinen Differenzen-Bildung ebenso hilfreich wie die rechte Seite bei der allgemeinen Summen-Bildung.

Für ganze 'n' und natürliche 'v' einschließlich '0' gilt also:

$$\begin{bmatrix} -n \\ v \end{bmatrix} \overset{!}{=} (-1)^{v} \bullet \begin{bmatrix} n \\ v \end{bmatrix} \qquad (8)$$

Mit diesem Ansatz läßt sich möglicherweise Formel (2) doch auch noch auf die direkte Weise ohne Konstruktions-Herleitung beweisen.

Eine weitere Eigenschaft ist, daß Binomial-Koeffizienten, deren untere Zahl negativ ist, immer '0' sein müssen (Eigenschaft einer arithmetischen Folge !).

Die Additionstheoreme (vgl. Bronstein S.105; Nr.2.2.1.2.; Formel 2.3. und 2.4.) ergeben sich ebenfalls für alle ganzen 'n' ohne viel Beweis.

INTERESSANTE FORMELN UND ANSÄTZE ZUR WEITERBEHANDLUNG

Das Auftauchen der Leibniz-Reihe

Konstruiert man das Potential-Dreieck analog zum Pascal'schen Dreieck mit der jeweiligen Startfolge 1, so erhält man wiederum 2 "Flügel" - diesmal allerdings sehr verschieden voneinander:

Zur Abwechslung wird das Dreieck 'mal wieder in der gewohnten Weise "aufge=stellt":

```
                                        • 1
                                    1       • 2
                                1       1       • 3
                            1       3       2       • 4
                        1       7      12       6       • 5
                    1      15      50      60      24       • 6
                1      31     180     390     360     120       • 7
            1      63     602    2100    3360    2520     720       • 8
        1     127    1932   10206   25200   31920   20160    5040     • 9
    1     255    6050   46620  166824  317520  332640  181440   40320
```

Nun kommt der "negative" Flügel des "Dreiecks" dran:

$$1 \quad \frac{-7}{8} \quad \frac{85}{108} \quad \frac{-415}{576} \quad \frac{12019}{18000} \quad \frac{-13489}{21600} \quad \frac{1139581}{2362500} \quad \frac{-2048593}{4410000} \quad ???$$

$$1 \quad \frac{-3}{4} \quad \frac{11}{18} \quad \frac{-50}{96} \quad \frac{137}{300} \quad \frac{-49}{120} \quad \frac{1089}{2940} \quad \frac{-761}{2240} \quad \frac{7129}{22680}$$

$$1 \quad \frac{-1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{-1}{4} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{-1}{6} \quad \frac{1}{7} \quad \frac{-1}{8} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{-1}{10}$$

$$1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

Die Leibniz-Reihe für ln(2) ergibt sich zwanglos unter Berücksichtigung von Formel (3) und Formel (4) .

Unbekannte, konvergente unendliche Reihen ?

Die Reihen oberhalb der Leibniz-Reihe sind unbekannt und mit hoher Wahschein= lichkeit konvergent.
Dies kann man mit dem Leibniz-Kriterium und anderen Kriterien nur schwer ab= schätzen. Es wird dagegen klarer, wenn man sich vergegenwärtigt, daß Formel (2) für den allgemeinen Fall nur geringfügig abgewandelt werden muß:

$$\text{neu} \longrightarrow \sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v+k} \bullet \left\langle {\mu \atop v} \right\rangle = (n+1)^{\mu} \qquad k = 0$$

Aufgrund der Newton'schen Interpolationsformel ist J E D E S Zwischenergebnis einer beliebigen Aufsummierung dadurch darstellbar, daß $k > 0$ gilt.
Für $\mu < 0$ geht der Ausdruck auf der rechten Seite mit wachsendem 'n' nach '0' - damit ist das notwendige Kriterium für Konvergenz erfüllt.
"Legt" man nun das Potential-"Dreieck" auf seine linke Seite, so ergibt eine mit Faktoren (≥ 1) gewichtete unendliche Differenzen-Bildung aller unbekann= ten Folgenglieder jeweils '1'.
Dieses Phänomen läßt auf alternierende Reihen "schließen" (sehr vage).

Wählt man nun das Leibniz-Kriterium, so muß "nur noch" gezeigt werden, daß die jeweiligen Reihen auch monoton sind.
Dies zu zeigen, hat sich als besonders schwierig herausgestellt, da eine allge= meinere Formel zur Berechnung der Potential-Koeffizienten als über die Diffe= renzen-Bildung bislang nicht gefunden werden konnte.
Macht man sich dagegen klar, daß im Potential-"Dreieck" J E D E Zahl von je= weils 6 weiteren Zahlen umgeben ist, die alle von dieser entsprechenden Zahl mitbestimmt werden, so wird deutlich, daß die Summe "unendlich" nirgends auf= tauchen darf, da dies entweder nach "unten" (Richtung Leibniz-Reihe) oder nach "links" (Richtung 1-er Zeile) sofort zu einem Werte-Überlauf führen muß.
Es kann daher "guten Gewissens" angenommen werden, daß alle Werte im "negati= ven Flügel" des Potential-"Dreiecks" kleiner oder gleich '1' sind.

Wer diese Zusammenhänge näher beweisen möchte, sollte sich auf eine besonders harte Arbeit gefaßt machen, da ein anderer Zusammenhang recht wahrscheinlich ist:

$$\left| \left\langle {\mu \atop v} \right\rangle \right| < \left| \left\langle {\mu - 1 \atop v} \right\rangle \right| \qquad \text{für } \mu < 0 \text{ und } v > 0$$

Setzt man die Formeln zur Definition der Potential-Koeffizienten an, so ergibt sich ein Koeffizienten-Vergleich (endliche Summe !), nach dem gelten muß:

$$(1+p)^{1 + \frac{1}{\mu}} \geq (1+p)$$

Daraus folgt sofort für $\mu < 0$ und $p > 0$, d.h. $v > 0$, ein '>'-Zeichen , während für $\mu > 0$ etc. ein '<'-Zeichen gilt.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß ein Koeffizienten-Vergleich nicht immer die einzig mögliche Lösung bietet; dies gilt besonders für endliche Summen und speziell gewählte Zahlen - hier kann man sich auch selbst "ein Bein stellen" !

Die aufgestellten Reihen sind alle absolut divergent (Minorante ist z.B. die '1/v' -Reihe) und müssen daher einer Beachtung des Riemannschen Vertauschungs=satzes unterzogen werden.
Es ist prinzipiell denkbar, daß die Reihen einen ähnlichen Term ergeben wie die Reihen:

$$\sum_{v=k}^{\infty} \frac{(-1)^v}{\ln(\ln(\cdots\ln(v)\cdots))}$$

Sie konvergieren ebenfalls derart langsam, daß eine numerische Berechnung völ=lig aussichtslos erscheint.

Die Verwendung bei der Lösung von Differential-Gleichungen

Im Vorlesungsmanuskript "Gewöhnliche Differential-Gleichungen" von Dr. Uwe A. Pittelkow wird unter §10 auf S.183-188 eine Rekursionsformel hergeleitet, die zur schnellen Berechnung der ansonsten "ungenießbaren" Diffenrentialgleichungen bzw. Differenzengleichugen n-ter Ordnung gehören. Man kann zwar immer einen Ansatz machen, doch das Ende der Rechnung kommt dabei erst nach sehr langer und elementarer Rechnung heraus.
Da die Endformeln komplizierte Polynome sind, kann es prinzipiell sein, daß der Ansatz (1) ein bequemeres allgemeines Ergebnis liefert.
Dies sollte man zumindest im Auge behalten.

In diesem Zusammenhang ist es sicher auch ratsam, nach einer ausmultiplizierten Formel zur Berechnung von Binomial-Koeffizienten zu suchen. Polynome lassen sich im allgemeinen schneller berechnen als Fakultäten etc.

SCHWIERIGKEITEN BEI DER BEWEISFÜHRUNG

Die Fakultät-Formel und die Vollständige Induktion

Betrachtet man Formel (6) für sich, so ergibt sich eine interessante Dar= stellung der 'Fakultät'-Zahlen:

$$n\,! = \left\langle {n \atop n} \right\rangle = \sum_{v=0}^{n} (-1)^{n+v} \cdot \binom{n}{v} \cdot (1+v)^{n}$$

Die n-te Ableitung eines Polynoms n-ten Grades ist also immer gleich der n-ten Differenzen-Summe und jeweils = 'n!'.

Will man diese Formel nun noch einmal mit Vollständiger Induktion beweisen, wie es ein guter Mathematiker gewohnt ist, so ergeben sich ungeahnte Probleme:

$n = 0$: $0! = (-1)^0 \cdot 1 \cdot 1^0 = 1$

$n = 1$: $1! = (-1)^1 \cdot 1 \cdot 1^1 + 1 \cdot 1 \cdot 2^1 = 1$

$n = 2$: $2! = 1 \cdot 1^2 - 2 \cdot 2^2 + 1 \cdot 3^2 = 1 - 8 + 9 = 2$

$n = 3$: $3! = -1 + 3 \cdot 8 - 3 \cdot 27 + 1 \cdot 64 = 6$

$n = 4$: $4! = 1 - 4 \cdot 16 + 6 \cdot 81 - 4 \cdot 256 + 625 = 24$

$n = 5$: $5! = -1 + 5 \cdot 32 - 10 \cdot 243 + 10 \cdot 1024 - 5 \cdot 3125 + 7776 = 120$

Wer hier einen scharfen Blick haben will, um jeweils einen Faktor 'n' aus der Summe zu ziehen, der bedenke, daß hier die Fakultät-Zahl durch eine meist fak= torfremde Summe zustandekommt.
Gibt man jemandem diese Fakultät-Formel ohne weitere Kommentare "zum Beweisen", so kann man nicht erwarten, daß die betreffende Person hierbei auch annähernd Chancen besitzt.

Will man diese Fakultät-Formel auf die mathematisch gewohnte Weise mit einem der vier allgemein anerkannten Beweis-Verfahren beweisen, so ist es durchaus möglich, daß dies nicht gelingt:

- Die Vollständige Induktion wird hier nicht viel weiter helfen.
- Ein direkter Beweis erfordert die Kenntnis der Newton'schen Interpo= lations-Formel und weiterer Formeln. Ohne deren Kenntnis und "blinder Anwendung" derselben wird es sehr hart...
- ein Widerspruchbeweis von der Sorte "Annahme: die Formel gilt nicht für alle natürlichen n, d.h.: Es existiert mind. ein Gegenbeispiel" wird sehr schwierig, da die Formel recht kompliziert ist.
- Das Schubladen-Prinzip findet hier wohl kaum eine Anwendung.

Der Wahrscheinlichkeits-Beweis als ernstzunehmendes Hilfsmittel

Ein durchaus ernstzunehmender "Beweis" in der Experimental-Mathematik ist der Wahrscheinlichkeits-Beweis:

Hierbei soll abgeschätzt werden, wie viele Möglichkeiten es gibt, bei wieder=holtem Einsetzen einer Formel "daneben" zu liegen. Finden sich zum Beispiel 23 oder mehr Bestätigungen einer Formel in Serie (ein einziges Gegenbeispiel würde die Formel ja bereits widerlegen !), so kann in den seltensten Fällen von "blinden Zufalls-Treffern" die Rede sein; dies um so mehr, als man Andersden=kende auffordert, doch einmal einen "Tip" zu geben, der die Formel widerlegt.

Auf die Formel zur Potenz-Summierung angewandt, ergab sich zunächst eine Bestä=tigung der Formeln bis $\mu = 4$, die auch im Bronstein stehen.
Darum wurde die Formel auch noch auf $\mu = 5$ angewandt und überprüft, inwieweit die Formel (2) mit den direkten Rechenergebnissen übereinstimmt.

Um die Wahrscheinlichkeit eines "Treffers" abzuschätzen, wurde folgendermaßen vorgegangen:

- Da nur ganze Zahlen zu erwarten sind, ist ein richtiges Ergebnis um so un=wahrscheinlicher, je größer die betreffende Zahl wird.
- Nimmt man den Kehrwert einer natürlichen Zahl als Wahrscheinlichkeit dafür, sie zufällig zu treffen, so ist diese Treffer-Wahrscheinlichkeit sicher zu hoch angesetzt, da dabei unter anderem angenommen wird, daß alle "1er" ohne Zufall bestimmt werden können.
- Alle Zahlen wurden als "unabhängige Zahlen" gehandelt, was immer dann zu ge=schehen hat, wenn jemand eine Serie von richtigen Treffern einer falschen Formel auf "großes Glück" zurückführen will.

Die Überprüfung der Formel bei nur 40 Zahlenwerten ergab auf diese Weise eine Wahrscheinlichkeit für zufälliges Treffen von ≈ 10^-110. So viel "Glück" hat man selten.

Dieser Wahrscheinlichkeits-Beweis ergab eine klare Wegweisung in der Frage, ob die ausprobierte Formel denn überhaupt stimmen könne.
Ohne das Auffinden der Newton'schen Interpolations-Formel hätte man sich mögli=cherweise vorerst mit einem Wahrscheinlichkeits-Beweis zufrieden geben müssen.

Sieht man die Mathematik nicht so sehr als "exakte", sondern mehr als "Natur"-Wissenschaft an, so bekommt man bei Wahrscheinlichkeits-Beweisen nicht sofort Magenkrämpfe, denn:

- In jeder Naturwissenschaft wird eine Formel über eine Meßreihe verifiziert. Diese baut auch nur auf wenigen "historischen" Messungen auf.
- "Exakte" Herleitungen eines real erlebbaren Naturgesetzes sind in der Regel idealisierte und damit strenggenommen unzulässige Beschreibungs-Versuche der äußerst komplexen Wirklichkeit.
- Es hat sich schon mehrmals als recht fruchtbringend erwiesen, unbewiesene Ansätze für richtig zu halten, die erst viel später bestätigt wurden.
  Man sollte bei einem derartigen Vorgehen lediglich darauf achten, seinen Standpunkt nicht allein von derartigen Formeln abhängig zu machen.

Auch in der Mathematik hat es sicher sehr viel Sinn, bisher unbewiesene Formeln zu veröffentlichen.
Dies erregt in erster Linie die Kritik Andersdenkender, die sicher am ehesten irgendwelche Fehler finden können - gegenüber "eigenen" Formeln und Ansätzen ist man meist zu tolerant.
Ein weiterer Vorteil einer solchen Veröffentlichung wäre sicher auch der, daß die Leute, die sich für die Rechenkunst interessieren, möglichst früh an die "wirklichen" Probleme herangeführt werden - ein Anfänger geht nicht nach be=reits bekanntem Schema vor und findet dadurch vielleicht etwas Neues.

Die Problematik des Koeffizienten-Vergleichs

Es ist mindestens eine unbewiesene Formel bekannt, die mit sehr hoher Wahr= scheinlichkeit - zumindest teilweise - richtig ist:

Der Fermat'sche Satz besagt:
Es existieren keine natürlichen Zahlen 'x', 'y', 'z', 'n' mit $n > 2$, für die gilt:

$$x^n + y^n = z^n \qquad (9)$$

Fermat (1601-1665) gab an, einen "wahrhaft wunderbaren Beweis" für diesen Satz zu kennen. Er verriet ihn jedoch nicht, und daher ist dieser nicht bekannt.

Will man den Satz nun beweisen, so ergibt sich zum Beispiel folgender Ansatz:

$$(x+p)^n - x^n = (x+q)^n \qquad (9')$$

'x', 'p', 'q' und 'n' seien ganze Zahlen derart, daß die oben angegebenen Defi= nitions-Bereiche nicht verletzt werden: $p > q \quad x > 0 \quad x + q > 0$

Entwickelt man die Gleichung nach dem Binomischen Lehrsatz (dieser war Fermat sicher bekannt, da er zusammen mit B.Pascal 1654 die Wahrscheinlichkeits-Rech= nung "erfand" - er hat sicher auch etwas vom Pascal'schen Dreieck gewußt), so ergibt sich auf der linken Seite ein Polynom vom Grade 'n-1' in 'x', während auf der rechten Seite ein Polynom vom Grade 'n' in 'x' steht.

Dies klingt zunächst wie ein Widerspruch, ist aber dadurch kein Widerspruch, da es ja nur um ein einziges Wertepaar 'x', 'y', 'z' geht und nicht um eine Polynom-Funktion.
Möglicherweise folgt bereits hieraus eine Aussage über die Eindeutigkeit von 'x', falls 'p' und 'q' fest liegen.

Man kann die sich ergebende Gleichung nun ausmultiplizieren und so schreiben:

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} x^n + \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} (q-p)\, x^{n-1} + \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} \left[q^2 - p^2\right] x^{n-2} + \begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix} \left[q^3 - p^3\right] x^{n-3} + \cdots = 0$$

Nun folgt mittels Koeffizienten-Vergleich sofort, da die Gleichung

$$[\, x + m \,]^n = 0$$

sicher mit einer ganzen Zahl $'m' < 0$ erfüllbar ist:

$$\begin{array}{rcl} q - p = m & = & -x \\ q^2 - p^2 = m^2 & = & (-x)^2 \\ \vdots \quad \vdots & & \vdots \\ \vdots \quad \vdots & & \vdots \\ q^n - p^n = m^n & = & (-x)^n \end{array} \qquad (10)$$

Mit wachsendem 'n' wird also immer mehr Präzision bei der Wahl passender 'q' und 'p' verlangt. Bei $n = 2$ ergeben sich 2 Gleichungen für 2 Unbekannte, wenn man 'x' und damit 'm' vorgibt.

Das klingt für einen allgemeinen Beweis sehr verheißungsvoll. Leider ergibt sich dabei aber durch Verwendung der 1.Binomischen Formel für $n = 2$ die Aussage, daß kein 'p' oder 'q' ungleich Null existiert, das Gleichung (9') erfüllen kann:

$p - q = x > 0$ sieht noch sehr gut aus.

$q^2 - p^2 = (q - p)\bullet(q + p) = x^2 = m\bullet m$ ergibt in der Konsequenz dagegen:

$$p - q = x = - m \qquad p + q = x = m$$

$$\Longleftrightarrow \qquad p = x = m \qquad q = 0$$

Da aber auch noch $(x + m)^n = 0$ gilt, folgt schließlich:

$$x = m = p = q = 0$$

So wollte es doch sicher keiner haben.

Als Konsequenz aus dieser Misere sollte man sich vor allem merken, daß Koeffizienten-Vergleiche nur im Zusammenhang mit dem Identitätssatz für Potenzreihen etc. anwendbar sind, aber keinesfalls ein brauchbares Beweisverfahren in der Mathematik darstellen können !

Es sei noch bemerkt, daß Koeffizienten-Vergleiche die Unmöglichkeit einer Formel grundsätzlich N I E beweisen können. Will man dagegen nur einen Spezialfall abhandeln, so kann eine Konstruktion über Koeffizientenvergleich zum Ziel führen. Eine allgemeine Lösung stellt dies jedoch nur in besonders begründeten Ausnahmefällen dar.

Damit wird der "schöne" Beweis für den Satz von Hamilton-Cayley, wie wir ihn in HM II in der Vorlesung kennengelernt haben, sehr deutlich in Frage gestellt: Dort ist das Kernstück des Beweises eben jener berüchtigte Koeffizienten-Vergleich. Man kann aus dem "Beweis" lediglich folgern, daß es "unter gewissen Umständen" möglich ist, die Gleichung

$$\left| A - \mu \cdot E \right| = 0$$

zu erfüllen. Es bleibt eine gewisse Unsicherheit zu der Frage, ob denn der Ansatz mit dem charakteristischen Polynom I M M E R gut geht.

Dieses Problem löst man am besten dadurch, daß man die Aufgabe von der "richtigen" Seite her angeht:

Da eine Matrix und ein Vektor miteinander multipliziert immer einen Vektor und gleichzeitig ein Skalar und ein Vektor miteinander multipliziert ebenfalls einen Vektor ergeben, äußert sich folgende Hoffnung:

Es werden diejenigen "Eigenvektoren" ' $\vec{x}$ ' zu den "Eigenwerten" 'μ' gesucht, für die gilt:

$$A \cdot \vec{x} = \mu \cdot \vec{x}$$

Umstellen der Gleichung ergibt:

$$(A - \mu \cdot E) \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

Da diese Gleichung als lineares Gleichungssystem für die einzelnen Komponenten von ' $\vec{x}$ ' interpretiert werden kann, folgt für eine nichttriviale Lösung des Gleichungssystems sofort:

$$\left| A - \mu \cdot E \right| = 0$$

Hieraus kann man die fraglichen 'μ' bestimmen.
Damit ist die Existenz von Eigenwerten und zugehörigen Eigenvektoren gezeigt.
Besonders deutlich wird die Richtigkeit des Satzes von Hamilton-Cayley, wenn man 'A' statt 'μ' in das charakteristische Polynom einsetzt:
Ausmultiplizieren der Determinante kann den Wert derselben nicht verändern !

Da nun die Richtigkeit des Satzes gezeigt ist, kann man weiter folgern, daß das Verfahren zur Matrizen-Inversion, das beim "offiziellen" Beweis abzufallen scheint, tatsächlich auch funktionieren kann.

Der einzige Nachteil dieses Beweises besteht darin, daß er dem "offiziellen" (falls es so etwas überhaupt gibt) Geschmack der Mathematiker nicht genügt:

Einen derart billigen Beweis durchschaut ja sofort jeder -
was soll man denn da noch in den Prüfungen fragen ????

Teillösungen sind auch gefragt

Am Fermat'schen Satz haben sich ja schon viele Leute "die Zähne ausgebissen". Darum ist es sicher auch interessant, die vielen "Holzwege", auf die man bei der Beweissuche geraten kann, ein wenig zu erläutern.

In der Regel fängt man sehr verheißungsvoll mit der Beweisführung an:

Ist $n = 1$, so kann man schreiben: $x = p - q > 0$, ganzzahlig

Die Gleichung (9) ist also für $n = 1$ richtig.

Ist $n = 2$, so formt man am besten die Gleichung (9') so um:

$$x^2 + 2\,p\,x + p^2 - x^2 = x^2 + 2\,q\,x + q^2 \quad \Longleftrightarrow \quad p\,(2\,x+p) = (x+q)^2$$

Wählt man $p = 1$, so ergibt sich: $2\,x + 1 = (x+q)^2$,
was bedeutet: '$x + q$' muß eine ungerade Zahl sein, während '$2\cdot x + 1$' eine Quadratzahl sein muß. Da $x > 0$ gilt, ergibt sich ein schönes "Strickmuster" zur Berechnung einer pythagoräischen Ergänzung:

$x + q = 3$	$\Longrightarrow$	$x = 4$	$\Longrightarrow$	$q = -1$		$x + p = 5$
$x + q = 5$	$\Longrightarrow$	$x = 12$	$\Longrightarrow$	$q = -7$		$x + p = 13$
$x + q = 7$	$\Longrightarrow$	$x = 24$	$\Longrightarrow$	$q = -17$		$x + p = 25$
$x + q = 9$	$\Longrightarrow$	$x = 40$	$\Longrightarrow$	$q = -31$		$x + p = 41$
$x + q = 11$	$\Longrightarrow$	$x = 60$	$\Longrightarrow$	$q = -49$		$x + p = 61$
$x + q = 13$	$\Longrightarrow$	$x = 84$	$\Longrightarrow$	$q = -71$		$x + p = 85$
$x + q = 15$	$\Longrightarrow$	$x = 112$	$\Longrightarrow$	$q = -97$		$x + p = 113$

Wählt man $p = 2$, so findet sich zu allen Quadraten der geraden Zahlen, die größer als 3 sind, mindestens eine pythagoräische Darstellung.

Die Formel $p\,(2\,x+p) = (x+q)^2$ sollten sich vor allem Lehramtskandida= ten merken, um nicht immer nur das Zahlenbeispiel 3 , 4 , 5 parat zu haben. Mit dieser Formel lassen sich übrigens alle pythagoräischen Darstellungen einer vorgegebenen Quadratzahl bestimmen. Dies wäre sicher eine nette Programmier-Übung für Informatiker (negative 'p' beachten !).

Die Existenz von natürlichen Zahlen, die Gleichung (9) für $n = 2$ erfüllen, ist also zur Genüge gezeigt.

Ist $n \geq 3$, so fängt das schöne Rätselraten erst an:
Es gibt derart viele Möglichkeiten, den Satz anzugehen, daß man gar nicht weiß, was denn nun schlußendlich zum Ziel führen soll.

Ein wichtiger Zusammenhang ist jedenfalls erwähnenswert:

Man kann Gleichung (9) umstellen und erhält aufgrund der Formel zur allge= meinen geometrischen Folge:

$$z^n - y^n = x^n$$

$$\Longleftrightarrow \qquad (z - y) \bullet \left[z^{n-1} + z^{n-2}\,y + \dots + zy^{n-2} + y^{n-1} \right] = x^n$$

Also muß 'x^n', wenn es eine natürliche Zahl sein soll, durch '(z-y)' teilbar sein.
Ist '(z-y)' selbst die n.Potenz einer natürlichen Zahl, so muß die geometrische Folge selbst auch die n.Potenz einer natürlichen Zahl sein.
Ist '(z-y)' keine n.Potenz einer natürlichen Zahl, so kann man die gesamte Gleichung aber sicher so oft durch '(z-y)' teilen, bis auf der linken Seite nur noch die geometrische Folge steht.

Man kann also o.B.d.A. sagen: $z + 1 = y$

Damit reduziert sich das Problem auf Anwendung der Formel (2) mit 'k' = -1.

Nun stellt die geometrische Folge für $n > 2$ eine Verletzung des Binomischen Lehrsatzes dar. Der Satz von Fermat scheint deshalb also richtig zu sein.

Setzt man nun $z = y + 1$ $x = y - h$ $h > 0$,

so ergibt sich die neue Form der Gleichung (hier nur für einige 'n' angegeben):

n = 2: $2\,y + 1 = (y-h)^2$ ist erfüllbar (siehe oben)

n = 3: Linke Seite: $3\,y^2 < 3\,y^2 + 3\,y + 1 < 3\,(y+1)^2$

n = 4: Linke Seite: $4\,y^3 < 4\,^3 + 6\,y^2 + 4\,y + 1 < 4\,(y+1)^3$

Allgemein kann man also abschätzen (die linke Seite der Gleichung stellt ja eine arithmetische Reihe (n-1).Ordnung dar und muß daher auch mit Polynomen (n-1).Ordnung abgeschätzt werden):

$$n \bullet y^{n-1} < (y+1)^n - y^n < n \bullet (y+1)^{n-1}$$

Diese Formel ist zwar richtig für $n \geq 2$, aber konkret kann man damit nicht allzu viel anfangen.

Es fällt auch noch auf, daß es z.B. für $n = 3$ andere Analogien zur pythago= räischen Darstellung einer Zahl gibt:

$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$ $1^3 + 6^3 + 8^3 = 9^3$
$6^3 + 8^3 + 10^3 = 12^3$ $2^3 + 12^3 + 16^3 = 18^3$
$9^3 + 12^3 + 15^3 = 18^3$ $3^3 + 10^3 + 18^3 = 19^3$

oder: $2^3 + 16^3 = 9^3 + 15^3$ $1^3 + 12^3 = 10^3 + 9^3$

Ferner gilt auch noch:

$8^3 - 7^3 = 13^2$ $14^3 - 7^3 = 7\hat{}4$

Als aussichtsreichsten Ansatz für einen Beweis des Fermat'schen Satzes kann man daher vor allem die Unverträglichkeit von Binomischem Lehrsatz und geometri= scher Folge ansehen.
Vielleicht gelingt ja auch eine brauchbare Schlußfolgerung aus Formel (2) .

Interessant wäre sicher auch noch die Frage, ob es möglich ist, eine Zahl n.Po= tenz durch n weitere Zahlen n.Potenz darzustellen. Hier ist vor allem die zu= gehörige geometrische Kontruktion von Interesse.
Für n = 3 erscheint es schon recht schwer zu sein, eine passende Konstruktion für die Bildung eines Potenz-Tripels anzugeben - möglicherweise benötigt man für die Konstruktion mindestens 3 Dimensionen Raum.

Fest steht auch, daß es mit zunehmendem 'n' immer schwieriger wird, eine Po= tenzzahl als Summe anderer Potenzzahlen darzustellen:

- Zu jeder Quadtratzahl existiert mindestens eine Darstellungsmöglichkeit.

- Bei kubischen Zahlen tauchen Lücken auf: von den Zahlen, die kleiner als '20' sind, lassen sich die Zahlen '6', '9', '12', '18' und '19' kubisch darstellen.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß es auch keine rationalen Zahlen 'x', 'y' und 'z' geben kann ('0' ist ausgeschlossen !), die die Fermat'sche Gleichung (9) für $n \geq 3$ erfüllen, wenn 'n' eine natürliche Zahl ist und der Fermat'sche Satz stimmt.
Gäbe es solche Zahlen, so könnte man mit dem Hauptnenner jeweils n-mal durch= multiplizieren und hätte ganze Zahlen gefunden. Durch Umsummierung hätte man dann auch natürliche Zahlen gefunden und den Satz von Fermat widerlegt.

UNBEANTWORTETE FRAGEN

Die 3.Möglichkeit einer Potenz-Summierung

Trotz aller Klarstellung zum Thema "Polynom-Summe" muß auch darauf hingewiesen werden, daß die Formeln (1) bis (8) mehr Fragen aufwerfen und aufwärmen als klären.
So ergibt sich nämlich kein schnell erkennbarer Ansatz für die Frage, wie die Potenz-Summe zusammengefaßt werden kann, wenn sie lautet:

$$\sum_{v=0}^{n} v^{v+k} = ??????????????????$$

Möglicherweise führt diese Summe auf eine Kombination von geometrischer und arithmetischer Folge.

Ähnlich interessant ist die Frage, was passiert, wenn Terme aus einer geometrischen und arithmetischen Folge durch Produkt gemischt werden, z.B.:

$$\sum_{v=0}^{n} v^{k} \cdot k^{v} = ??????????$$

Es existiert prinzipiell noch mindestens eine weitere Möglichkeit, ein spezifisches Zahlen-Dreieck oder etwas ähniches aufzubauen:

$$k(\mu + 1, v + 1) = k(\mu, v)^{v+1} * k(\mu, v + 1)^{v+2}$$

Wählt man:

$$k(0, 0) = 2 \qquad \text{und} \qquad k(0, v) = 1 \quad \text{für} \quad v \neq 0 ,$$

so ergibt sich ein Dreieck, das etwa so aussieht:

```
1       1       1       1       1       2       1       1       1       1
                            1       2       2       1
                        1       2       8       4       1
                    1       2      128    4096     64       1
```

Besieht man sich dieses Dreieck genauer, so erkennt man, daß der Logarithmus zur Basis 2 jeweils die bereits bekannten Potential-Koeffizienten liefert.
Ob eine derartige Rechnung in irgendeinem Zusammenhang Sinn hat, ist wie üblich schwer zu sagen. Fest steht nur, daß auch Potenzierungen von Binomial-Koeffizienten bislang nicht großartig untersucht wurden.

Analog zur Newton'schen Interpolations-Formel könnte man für harte Probleme eine Linearkombination von Potential-Koeffizienten versuchen. Dies scheint für die Summierung von v^(v+k) in Frage zu kommen.

ENDE DER AUSARBEITUNG: 'POTENZ-SUMMEN UND IHRE BERECHNUNG'