Gedaempfter.Harmonischer.Oszillator.nb

Fragesteller: 06.08.2013 Norbert Südland
Bearbeitung: 06.08.2013 - 07.08.2013 Norbert Südland
Letzte Berechnung: 07.08.2013 Norbert Südland

■ 1.1. Frage

Wie reagiert ein *gedämpfter Harmonischer Oszillator* auf ein *Steuersignal*?

■ 1.1.1. Vorbereitung

■ 1.1.1.1. Laden von *FractionalCalculus*

```
Global`$FractionalCalculusPalette = True;
Get["FractionalCalculus`FractionalCalculus`", "© Gerd Baumann, Norbert Südland 1996−2013"]
```

−−> Mathematica Kernel is working. <−−

−− "FractionalCalculus`Options`" is available. −−

−− "FractionalCalculus`Variables`" is available. −−

−− "FractionalCalculus`Boole`" is available. −−

−− "FractionalCalculus`Gamma`" is available. −−

−− "FractionalCalculus`Synonyms`" is available. −−

−− "FractionalCalculus`FoxH`" is available. −−

−− "FractionalCalculus`SymmetricalDelta`" is available. −−

−− "FractionalCalculus`MellinTransform`" is available. −−

−− "FractionalCalculus`MellinBarnesSeries`" is available. −−

−− "FractionalCalculus`RiemannLiouville`" is available. −−

−− "FractionalCalculus`Integral`" is available. −−

−− "FractionalCalculus`Weyl`" is available. −−

−− "FractionalCalculus`ErdelyiKober`" is available. −−

−− "FractionalCalculus`Riesz`" is available. −−

−− "FractionalCalculus`IntegralTransforms`" is available. −−

−− "FractionalCalculus`FractionalDSolve`" is available. −−

−−> FractionalCalculus is ready. <−−

−−> FractionalCalculus version number: 1.022 <−−

© Gerd Baumann, Norbert Südland 1996−2013

■ 1.2. Antwort

■ 1.2.1. Zugehörige Differentialgleichung

■ 1.2.1.1. Mit Diracscher Deltafunktion

Die zu lösende Differentialgleichung lautet als *Kraftbilanz* (vgl. [1998Stö], Abschnitt 9.2.1.2-1., Seite251)

$$\mathbf{Gleichung[1]} = s''[t] + 2\,\delta\, s'[t] + \omega^2\, s[t] == \frac{f}{m}\, 2\,\delta[t]$$

$$\omega^2\, s[t] + 2\,\delta\, s'[t] + s''[t] == \frac{2\, f\, \delta[t]}{m}$$

Hier muss genau zwischen dem *logarithmischen Dekrement* $\boldsymbol{\delta}$ und der Diracschen Deltafunktion $\boldsymbol{\delta[t]}$ unterschieden werden. Schon diese Ähnlichkeit der Bezeichnungen zeigt, dass der hier beschrittene Lösungsweg nur selten begangen wird.

■ 1.2.1.2. Richtiger Vorfaktor vor der Diracschen Deltafunktion

Die *Laplace-Faltung* der Diracschen Delta-Funktion $\boldsymbol{\delta[t]}$ mit einer beliebigen Steuergröße ergibt

$$2\int_0^\infty e^{-p\,t}\,\delta[t]\,dt$$

```
LaplaceTransform[2 δ[t], t, p, IntegralRepresentation → True]
% /. {C[__] :→ 1}
%%% == %
```

1

C[LaplaceTransform, p]

1

True

Der Vorfaktor **2** vor der Diracschen Deltafunktion ist somit konsistent.

■ 1.2.1.3. Laplace-Transformation

Die Laplace-Transformation der Gleichung ergibt:

```
LaplaceGleichung[1] = LaplaceTransform[Gleichung[1], t, p]
```

Literature: [1974Obe], I.1.9, page 11; [1993SKM], (7.20):

Literature: [1974Obe], I.1.9, page 11; [1993SKM], (7.20):

$$p^2\, \mathcal{L}_t^p[s[t]] + \omega^2\, \mathcal{L}_t^p[s[t]] + 2\,\delta\,(p\, \mathcal{L}_t^p[s[t]] - s[0]) - p\, s[0] - s'[0] == \frac{f\, C[\text{LaplaceTransform},\ p]}{m}$$

Hier sind alle *Anfangswertprobleme* eines *optimierten Fundamentalsystems* berücksichtigt. Die *Konstante* **C[LaplaceTransform, p]** gibt an, dass bei der inversen Laplace-Transformation von $\boldsymbol{p}$ nach zum Beispiel $\boldsymbol{t}$ eine *Heavisidesche Sprungfunktion* $\boldsymbol{\theta[t]}$ zum Teilergebnis zu multiplizieren ist. Mit Hilfe dieser *Konstanten* ist eine vollautomatische Lösung einer *linearen Differentialgleichung* in der Zeit $\boldsymbol{t}$ mit *Mathematica* umsetzbar.

■ 1.2.1.4. Analytische Auflösung im Laplace-Raum

Die analytische Auflösung im Laplace-Raum ergibt:

LaplaceLösung[1] =
Map[Simplify, Solve[LaplaceGleichung[1], LaplaceTransform[*s*[*t*], *t*, *p*]] // Flatten // ExpandAll, {3}]

$$\left\{\mathcal{L}_t^p[s[t]] \to \frac{f\, C[\text{LaplaceTransform},\ p]}{m\,(p^2 + 2\,p\,\delta + \omega^2)} + \frac{p\, s[0]}{p^2 + 2\,p\,\delta + \omega^2} + \frac{2\,\delta\, s[0]}{p^2 + 2\,p\,\delta + \omega^2} + \frac{s'[0]}{p^2 + 2\,p\,\delta + \omega^2}\right\}$$

Das Anfangswertproblem $s'[0] \to \frac{f}{m}$ führt die inhomogene Lösung auf einen Teil der homogenen Lösung zurück.

■ 1.2.1.5. Inverse Laplace-Transformation

Die inverse Laplace-Transformation dieser Lösung ergibt, wobei für die *inhomogene Lösung* die *Heavisidesche Sprungfunktion* $\theta[t]$ von Hand ergänzt werden muss:

Lösung[1] = InverseLaplaceTransform[LaplaceLösung[1], *p*, *t*]

$$\left\{s[t] \to \frac{e^{-t\left(\delta+\sqrt{\delta^2-\omega^2}\right)}\left(-1 + e^{2\,t\sqrt{\delta^2-\omega^2}}\right) f\,\theta[t]}{2\,m\sqrt{\delta^2-\omega^2}} + \frac{e^{-t\left(\delta+\sqrt{\delta^2-\omega^2}\right)}\left(\left(-1 + e^{2\,t\sqrt{\delta^2-\omega^2}}\right)\delta\, s[0] + \left(1 + e^{2\,t\sqrt{\delta^2-\omega^2}}\right)\sqrt{\delta^2-\omega^2}\; s[0] + \left(-1 + e^{2\,t\sqrt{\delta^2-\omega^2}}\right) s'[0]\right)}{2\sqrt{\delta^2-\omega^2}}\right\}$$

■ 1.2.1.6. Proben zur gefundenen Lösung

Die Probe mit der gefundenen Lösung ergibt:

Gleichung[1] /. {*s* → Function @@ {{*t*}, *s*[*t*] /. Lösung[1]}} // Simplify
% /. {DiracDelta → SymmetricalDelta}
% /. {*t* → 0}

$$\frac{f\left(-4\,\delta[t] + \frac{e^{-t\left(\delta+\sqrt{\delta^2-\omega^2}\right)}\left(2\left(1+e^{2\,t\sqrt{\delta^2-\omega^2}}\right)\sqrt{\delta^2-\omega^2}\ \text{DiracDelta}[t]+\left(-1+e^{2\,t\sqrt{\delta^2-\omega^2}}\right)\text{DiracDelta}'[t]\right)}{\sqrt{\delta^2-\omega^2}}\right)}{2\,m} == 0$$

$$\frac{f\left(-4\,\delta[t] + \frac{e^{-t\left(\delta+\sqrt{\delta^2-\omega^2}\right)}\left(2\left(1+e^{2\,t\sqrt{\delta^2-\omega^2}}\right)\sqrt{\delta^2-\omega^2}\ \delta[t]+\left(-1+e^{2\,t\sqrt{\delta^2-\omega^2}}\right)\delta^{(1)}[t]\right)}{\sqrt{\delta^2-\omega^2}}\right)}{2\,m} == 0$$

True

Die Anfangswertprobleme werden korrekt abgebildet:

s[t] /. Lösung[1]
% /. {t → 0} // Simplify
% == s[0]

$$\frac{e^{-t\left(\delta+\sqrt{\delta^2-\omega^2}\right)}\left(-1+e^{2t\sqrt{\delta^2-\omega^2}}\right) f\, \theta[t]}{2\, m \sqrt{\delta^2-\omega^2}} + \frac{e^{-t\left(\delta+\sqrt{\delta^2-\omega^2}\right)}\left(\left(-1+e^{2t\sqrt{\delta^2-\omega^2}}\right)\delta\, s[0]+\left(1+e^{2t\sqrt{\delta^2-\omega^2}}\right)\sqrt{\delta^2-\omega^2}\, s[0]+\left(-1+e^{2t\sqrt{\delta^2-\omega^2}}\right)s'[0]\right)}{2\sqrt{\delta^2-\omega^2}}$$

s[0]

True

∂

∂_t (s[t] /. Lösung[1])
% /. {t → 0, f → 0} // Simplify
% == s'[0]

$$\frac{e^{-t\left(\delta+\sqrt{\delta^2-\omega^2}\right)}\left(-1+e^{2t\sqrt{\delta^2-\omega^2}}\right) f\, \mathrm{DiracDelta}[t]}{2\, m \sqrt{\delta^2-\omega^2}} + \frac{e^{2t\sqrt{\delta^2-\omega^2}-t\left(\delta+\sqrt{\delta^2-\omega^2}\right)} f\, \theta[t]}{m} + \frac{e^{-t\left(\delta+\sqrt{\delta^2-\omega^2}\right)}\left(-1+e^{2t\sqrt{\delta^2-\omega^2}}\right) f\left(-\delta-\sqrt{\delta^2-\omega^2}\right)\theta[t]}{2\, m \sqrt{\delta^2-\omega^2}} + \frac{1}{2\sqrt{\delta^2-\omega^2}}\Bigg(e^{-t\left(\delta+\sqrt{\delta^2-\omega^2}\right)}\left(-\delta-\sqrt{\delta^2-\omega^2}\right)\left(\left(-1+e^{2t\sqrt{\delta^2-\omega^2}}\right)\delta\, s[0]+\left(1+e^{2t\sqrt{\delta^2-\omega^2}}\right)\sqrt{\delta^2-\omega^2}\, s[0]+\left(-1+e^{2t\sqrt{\delta^2-\omega^2}}\right)s'[0]\right)\Bigg) + \frac{e^{-t\left(\delta+\sqrt{\delta^2-\omega^2}\right)}\left(2\, e^{2t\sqrt{\delta^2-\omega^2}}\,\delta\sqrt{\delta^2-\omega^2}\, s[0]+2\, e^{2t\sqrt{\delta^2-\omega^2}}\left(\delta^2-\omega^2\right)s[0]+2\, e^{2t\sqrt{\delta^2-\omega^2}}\sqrt{\delta^2-\omega^2}\, s'[0]\right)}{2\sqrt{\delta^2-\omega^2}}$$

s′[0]

True

Das war zu zeigen.

■ 1.2.1.7. Schöne Darstellung der Lösung

Die gefundene Lösung

Plus @@ # & /@ (Cases[s[t] /. Lösung[1] // ExpandAll, _#] & /@ {s[0], s'[0], θ[t]}) // Simplify

$$\left\{\frac{e^{-t\left(\delta+\sqrt{\delta^2-\omega^2}\right)}\left(\left(-1+e^{2t\sqrt{\delta^2-\omega^2}}\right)\delta+\left(1+e^{2t\sqrt{\delta^2-\omega^2}}\right)\sqrt{\delta^2-\omega^2}\right)s[0]}{2\sqrt{\delta^2-\omega^2}},\ \frac{e^{-t\left(\delta+\sqrt{\delta^2-\omega^2}\right)}\left(-1+e^{2t\sqrt{\delta^2-\omega^2}}\right)s'[0]}{2\sqrt{\delta^2-\omega^2}},\ \frac{e^{-t\left(\delta+\sqrt{\delta^2-\omega^2}\right)}\left(-1+e^{2t\sqrt{\delta^2-\omega^2}}\right) f\, \theta[t]}{2\, m\sqrt{\delta^2-\omega^2}}\right\}$$

kann mit Hilfe der Kosinus-Funktion zusammengefasst werden:

Lösung[1, schön] =

$$\left\{s \to \text{Function} @@ \left\{\{t\}, s[0]\left(e^{-\delta t}\,\text{Cos}\left[\sqrt{\omega^2-\delta^2}\;t\right] + \delta\, e^{-\delta t}\,\frac{\text{Sin}\left[\sqrt{\omega^2-\delta^2}\;t\right]}{\sqrt{\omega^2-\delta^2}}\right) + s'[0]\left(e^{-\delta t}\,\frac{\text{Sin}\left[\sqrt{\omega^2-\delta^2}\;t\right]}{\sqrt{\omega^2-\delta^2}}\right) + \frac{f}{m}\,\theta[t]\left(e^{-\delta t}\,\frac{\text{Sin}\left[\sqrt{\omega^2-\delta^2}\;t\right]}{\sqrt{\omega^2-\delta^2}}\right)\right\}\right\}$$

$$\left\{s \to \text{Function}\left[\{t\}, s[0]\left(e^{-t\delta}\,\text{Cos}\left[t\sqrt{-\delta^2+\omega^2}\right] + \frac{e^{-t\delta}\,\delta\,\text{Sin}\left[t\sqrt{-\delta^2+\omega^2}\right]}{\sqrt{-\delta^2+\omega^2}}\right) + \frac{e^{-t\delta}\,f\,\text{Sin}\left[t\sqrt{-\delta^2+\omega^2}\right]\theta[t]}{m\sqrt{-\delta^2+\omega^2}} + \frac{e^{-t\delta}\,\text{Sin}\left[t\sqrt{-\delta^2+\omega^2}\right]s'[0]}{\sqrt{-\delta^2+\omega^2}}\right]\right\}$$

Die Probe mit dieser Lösung ergibt:

Gleichung[1] /. Lösung[1, schön] // Simplify
% /. {DiracDelta → SymmetricalDelta}
% /. {t → 0}

$$\frac{f\left(-2\,\delta[t] + e^{-t\delta}\left(2\,\text{Cos}\left[t\sqrt{-\delta^2+\omega^2}\right]\text{DiracDelta}[t] + \frac{\text{Sin}\left[t\sqrt{-\delta^2+\omega^2}\right]\text{DiracDelta}'[t]}{\sqrt{-\delta^2+\omega^2}}\right)\right)}{m} == 0$$

$$\frac{f\left(-2\,\delta[t] + e^{-t\delta}\left(2\,\text{Cos}\left[t\sqrt{-\delta^2+\omega^2}\right]\delta[t] + \frac{\text{Sin}\left[t\sqrt{-\delta^2+\omega^2}\right]\delta^{(1)}[t]}{\sqrt{-\delta^2+\omega^2}}\right)\right)}{m} == 0$$

True

***s*[*t*] /. Lösung[1, schön]**
% /. {*t* → 0}
% == *s*[0]

$$s[0]\left(e^{-t\delta}\,\text{Cos}\left[t\sqrt{-\delta^2+\omega^2}\right] + \frac{e^{-t\delta}\,\delta\,\text{Sin}\left[t\sqrt{-\delta^2+\omega^2}\right]}{\sqrt{-\delta^2+\omega^2}}\right) + \frac{e^{-t\delta}\,f\,\text{Sin}\left[t\sqrt{-\delta^2+\omega^2}\right]\theta[t]}{m\sqrt{-\delta^2+\omega^2}} + \frac{e^{-t\delta}\,\text{Sin}\left[t\sqrt{-\delta^2+\omega^2}\right]s'[0]}{\sqrt{-\delta^2+\omega^2}}$$

$s[0]$

True

s'[t] /. Lösung[1, schön]
% /. {t → 0, f → 0}
% == s'[0]

$$\frac{e^{-t\delta} f \,\mathrm{DiracDelta}[t]\, \mathrm{Sin}\left[t\sqrt{-\delta^2+\omega^2}\right]}{m\sqrt{-\delta^2+\omega^2}} + s[0]\left(-\frac{e^{-t\delta}\delta^2\,\mathrm{Sin}\left[t\sqrt{-\delta^2+\omega^2}\right]}{\sqrt{-\delta^2+\omega^2}} - e^{-t\delta}\sqrt{-\delta^2+\omega^2}\,\mathrm{Sin}\left[t\sqrt{-\delta^2+\omega^2}\right]\right) + \frac{e^{-t\delta} f\,\mathrm{Cos}\left[t\sqrt{-\delta^2+\omega^2}\right]\theta[t]}{m} - \frac{e^{-t\delta} f\,\delta\,\mathrm{Sin}\left[t\sqrt{-\delta^2+\omega^2}\right]\theta[t]}{m\sqrt{-\delta^2+\omega^2}} + e^{-t\delta}\mathrm{Cos}\left[t\sqrt{-\delta^2+\omega^2}\right]s'[0] - \frac{e^{-t\delta}\delta\,\mathrm{Sin}\left[t\sqrt{-\delta^2+\omega^2}\right]s'[0]}{\sqrt{-\delta^2+\omega^2}}$$

$s'[0]$

True

Auch diese Lösungsdarstellung erfüllt die Gleichung und die Anfangswertprobleme.

▪ 1.2.2. Analytischer Synthesizer für Klangerzeugung

▪ 1.2.2.1. Schöne Darstellung der Lösung

Die gefundene Lösung

Lösung[1, schön]

$$\left\{s \to \mathrm{Function}\left[\{t\}, s[0]\left(e^{-t\delta}\mathrm{Cos}\left[t\sqrt{-\delta^2+\omega^2}\right] + \frac{e^{-t\delta}\delta\,\mathrm{Sin}\left[t\sqrt{-\delta^2+\omega^2}\right]}{\sqrt{-\delta^2+\omega^2}}\right) + \frac{e^{-t\delta} f\,\mathrm{Sin}\left[t\sqrt{-\delta^2+\omega^2}\right]\theta[t]}{m\sqrt{-\delta^2+\omega^2}} + \frac{e^{-t\delta}\mathrm{Sin}\left[t\sqrt{-\delta^2+\omega^2}\right]s'[0]}{\sqrt{-\delta^2+\omega^2}}\right]\right\}$$

gibt das Grundgerüst der Lösung an:

Für $f == 0$ wird das *Abklingverhalten* eines Tones beschrieben.

Für $f \neq 0$ muss eine *Laplace-Faltung* mit der inhomogenen Lösung bestimmt werden, um das *Anklingen* und *Klingen* eines Tones zu beschreiben.

▪ 1.2.2.2. Erzwingen einer Sinus-Schwingung

Die Laplace-Faltung mit einer Sinus-Schwingung ergibt im *Resonanzfall*:

Lösung[1, Sin] =

$$\int_0^t (s[t-\tau] \;/.\; \mathrm{Lösung}[1, \mathrm{schön}] \;/.\; \{s[0] \to 0, s'[0] \to 0, \theta[\_] \to 1\})\, \mathrm{Sin}\left[\sqrt{\omega^2-\delta^2}\;\tau\right] d\tau \;//\; \mathrm{FullSimplify}$$

$$-\frac{2\, e^{-\frac{t\delta}{2}} f\left(\delta\,\mathrm{Cosh}\left[\frac{t\delta}{2}\right]\mathrm{Sin}\left[t\sqrt{-\delta^2+\omega^2}\right] - 2\sqrt{-\delta^2+\omega^2}\,\mathrm{Cos}\left[t\sqrt{-\delta^2+\omega^2}\right]\mathrm{Sinh}\left[\frac{t\delta}{2}\right]\right)}{m\,\delta\,(3\delta^2 - 4\omega^2)}$$

Für große Zeiten ***t*** ergibt sich hier eine reine Sinus-Schwingung mit versetzter Phase:

Lösung[1, Sin] /. {Cosh[x_] :→ Exp[x], Sinh[x_] → Exp[x]} // Simplify

$$\frac{4\,f\,\sqrt{-\delta^2+\omega^2}\,\mathrm{Cos}\left[t\,\sqrt{-\delta^2+\omega^2}\right]-2\,f\,\delta\,\mathrm{Sin}\left[t\,\sqrt{-\delta^2+\omega^2}\right]}{3\,m\,\delta^3-4\,m\,\delta\,\omega^2}$$

Die Laplace-Faltung mit einer Kosinus-Schwingung ergibt im *Resonanzfall*:

Lösung[1, Cos] =

$$\int_0^t \left(s[t-\tau]\ /.\ \text{Lösung}[1,\text{schön}]\ /.\ \{s[0]\to 0,\ s'[0]\to 0,\ \theta[\_]\to 1\}\right)\mathrm{Cos}\left[\sqrt{\omega^2-\delta^2}\ \tau\right]d\tau\ //\ \text{FullSimplify}$$

$$\frac{f\left(\left(-1+e^{-t\,\delta}\right)\delta\,\mathrm{Cos}\left[t\,\sqrt{-\delta^2+\omega^2}\right]+\frac{e^{-t\,\delta}\left(-\delta^2+2\,\omega^2+2\,e^{t\,\delta}\,(\delta-\omega)\,(\delta+\omega)\right)\mathrm{Sin}\left[t\,\sqrt{-\delta^2+\omega^2}\right]}{\sqrt{-\delta^2+\omega^2}}\right)}{m\,\delta\,(3\,\delta^2-4\,\omega^2)}$$

Dieser Fall ist komplizierter, weil die angegende Kraft hier schlagartig einsetzt.

Für große Zeiten ***t*** ergibt sich auch hier eine reine Sinus-Schwingung mit versetzter Phase:

ExpandAll[Lösung[1, Cos]] /. {$e^{-\delta\,t}$ → 0} // Simplify

$$-\frac{f\left(\delta\,\sqrt{-\delta^2+\omega^2}\,\mathrm{Cos}\left[t\,\sqrt{-\delta^2+\omega^2}\right]+2\,(-\delta^2+\omega^2)\,\mathrm{Sin}\left[t\,\sqrt{-\delta^2+\omega^2}\right]\right)}{m\,\delta\,(3\,\delta^2-4\,\omega^2)\,\sqrt{-\delta^2+\omega^2}}$$

Die Fälle $\boldsymbol{\omega == \delta}$ (aperiodischer Grenzfall) und $\boldsymbol{3\,\delta^2 == 4\,\omega^2}$ (spezieller Kriechfall) sind hier jeweils gesondert abzuhandeln.

■ 1.2.3. Aperiodischer Grenzfall

■ 1.2.3.1. Mit Diracscher Deltafunktion

Die zu lösende Differentialgleichung lautet als *Kraftbilanz* (vgl. [1998Stö], Abschnitt 9.2.1.2-1., Seite251)

$$\textbf{Gleichung[2]} = s''[t] + 2\,\delta\,s'[t] + \delta^2\,s[t] == \frac{f}{m}\,2\,\delta[t]$$

$$\delta^2\,s[t]+2\,\delta\,s'[t]+s''[t]==\frac{2\,f\,\delta[t]}{m}$$

Hier muss genau zwischen dem *logarithmischen Dekrement* $\boldsymbol{\delta}$ und der Diracschen Deltafunktion $\boldsymbol{\delta[t]}$ unterschieden werden. Schon diese Ähnlichkeit der Bezeichnungen zeigt, dass der hier beschrittene Lösungsweg nur selten begangen wird.

■ 1.2.3.2. Laplace-Transformation

Die Laplace-Transformation der Gleichung ergibt:

LaplaceGleichung[2] = LaplaceTransform[Gleichung[2], *t*, *p*]

Literature: [1974Obe], I.1.9, page 11; [1993SKM], (7.20):

Literature: [1974Obe], I.1.9, page 11; [1993SKM], (7.20):

$$p^2\, \mathcal{L}_t^p[s[t]] + \delta^2\, \mathcal{L}_t^p[s[t]] + 2\,\delta\,(p\, \mathcal{L}_t^p[s[t]] - s[0]) - p\, s[0] - s'[0] == \frac{f\, C[\text{LaplaceTransform},\ p]}{m}$$

Hier sind alle *Anfangswertprobleme* eines *optimierten Fundamentalsystems* berücksichtigt.

■ 1.2.3.3. Analytische Auflösung im Laplace-Raum

Die analytische Auflösung im Laplace-Raum ergibt:

LaplaceLösung[2] =
Map[Simplify, Solve[LaplaceGleichung[2], LaplaceTransform[*s*[*t*], *t*, *p*]] // Flatten // ExpandAll, {3}]

$$\left\{\mathcal{L}_t^p[s[t]] \to \frac{f\, C[\text{LaplaceTransform},\ p]}{m\,(p+\delta)^2} + \frac{p\, s[0]}{(p+\delta)^2} + \frac{2\,\delta\, s[0]}{(p+\delta)^2} + \frac{s'[0]}{(p+\delta)^2}\right\}$$

Das Anfangswertproblem $\boldsymbol{s'[0] \to \frac{f}{m}}$ führt die inhomogene Lösung auf einen Teil der homogenen Lösung zurück.

■ 1.2.3.4. Inverse Laplace-Transformation

Die inverse Laplace-Transformation dieser Lösung ergibt, wobei für die *inhomogene Lösung* die *Heavisidesche Sprungfunktion* $\boldsymbol{\theta[t]}$ von Hand ergänzt werden muss:

Lösung[2] = InverseLaplaceTransform[LaplaceLösung[2], *p*, *t*]

$$\left\{s[t] \to \frac{e^{-t\,\delta}\, f\, t\, \theta[t]}{m} + e^{-t\,\delta}\,(s[0] + t\,\delta\, s[0] + t\, s'[0])\right\}$$

■ 1.2.3.5. Proben zur gefundenen Lösung

Die Probe mit der gefundenen Lösung ergibt:

Gleichung[2] /. {*s* → Function @@ {{*t*}, *s*[*t*] /. Lösung[2]}} // Simplify
% /. {DiracDelta → SymmetricalDelta}
% /. {*t* → 0}

$$\frac{f\,(-2\,\delta[t] + e^{-t\,\delta}\,(2\,\text{DiracDelta}[t] + t\,\text{DiracDelta}'[t]))}{m} == 0$$

$$\frac{f\,(-2\,\delta[t] + e^{-t\,\delta}\,(2\,\delta[t] + t\,\delta^{(1)}[t]))}{m} == 0$$

True

Die Anfangswertprobleme werden korrekt abgebildet:

s[t] /. Lösung[2]
% /. {t → 0} // Simplify
% == s[0]

$$\frac{e^{-t\delta}\, f\, t\, \theta[t]}{m} + e^{-t\delta}\,(s[0] + t\,\delta\, s[0] + t\, s'[0])$$

s[0]

True

∂_t (s[t] /. Lösung[2])
% /. {t → 0, f → 0} // Simplify
% == s'[0]

$$\frac{e^{-t\delta}\, f\, t\, \mathrm{DiracDelta}[t]}{m} + \frac{e^{-t\delta}\, f\, \theta[t]}{m} - \frac{e^{-t\delta}\, f\, t\,\delta\, \theta[t]}{m} + e^{-t\delta}\,(\delta\, s[0] + s'[0]) - e^{-t\delta}\,\delta\,(s[0] + t\,\delta\, s[0] + t\, s'[0])$$

s'[0]

True

Das war zu zeigen.

■ 1.2.3.6. Schöne Darstellung der Lösung

Die gefundene Lösung

Plus @@ # & /@ (Cases[s[t] /. Lösung[2] // ExpandAll, _#] & /@ {s[0], s'[0], θ[t]}) // Simplify

$$\left\{e^{-t\delta}\,(1 + t\,\delta)\, s[0],\ e^{-t\delta}\, t\, s'[0],\ \frac{e^{-t\delta}\, f\, t\, \theta[t]}{m}\right\}$$

kann mit Hilfe der Kosinus-Funktion zusammengefasst werden:

Lösung[2, schön] = $\left\{s \to \mathrm{Function} @@ \left\{\{t\},\ s[0]\, e^{-\delta t}\,(1 + \delta\, t) + s'[0]\, e^{-\delta t}\, t + \frac{f}{m}\,\theta[t]\,(e^{-\delta t}\, t)\right\}\right\}$

$$\left\{s \to \mathrm{Function}\left[\{t\},\ e^{-t\delta}\,(1 + t\,\delta)\, s[0] + \frac{e^{-t\delta}\, f\, t\, \theta[t]}{m} + e^{-t\delta}\, t\, s'[0]\right]\right\}$$

Die Probe mit dieser Lösung ergibt:

Gleichung[2] /. Lösung[2, schön] // Simplify
% /. {DiracDelta → SymmetricalDelta}
% /. {t → 0}

$$\frac{f\,(-2\,\delta[t] + e^{-t\delta}\,(2\,\mathrm{DiracDelta}[t] + t\,\mathrm{DiracDelta}'[t]))}{m} == 0$$

$$\frac{f\,(-2\,\delta[t] + e^{-t\delta}\,(2\,\delta[t] + t\,\delta^{(1)}[t]))}{m} == 0$$

True

```
s[t] /. Lösung[2, schön]
% /. {t → 0}
% == s[0]
```

$$e^{-t\,\delta}\,(1+t\,\delta)\,s[0]+\frac{e^{-t\,\delta}\,f\,t\,\theta[t]}{m}+e^{-t\,\delta}\,t\,s'[0]$$

$s[0]$

True

```
s'[t] /. Lösung[2, schön]
% /. {t → 0, f → 0}
% == s'[0]
```

$$\frac{e^{-t\,\delta}\,f\,t\,\mathrm{DiracDelta}[t]}{m}+e^{-t\,\delta}\,\delta\,s[0]-e^{-t\,\delta}\,\delta\,(1+t\,\delta)\,s[0]+\frac{e^{-t\,\delta}\,f\,\theta[t]}{m}-\frac{e^{-t\,\delta}\,f\,t\,\delta\,\theta[t]}{m}+e^{-t\,\delta}\,s'[0]-e^{-t\,\delta}\,t\,\delta\,s'[0]$$

$s'[0]$

True

Auch diese Lösungsdarstellung erfüllt die Gleichung und die Anfangswertprobleme.

1.2.4. Analytischer Synthesizer für Klangerzeugung

1.2.4.1. Schöne Darstellung der Lösung

Die gefundene Lösung

```
Lösung[2, schön]
```

$$\left\{s\to\mathrm{Function}\left[\{t\},\,e^{-t\,\delta}\,(1+t\,\delta)\,s[0]+\frac{e^{-t\,\delta}\,f\,t\,\theta[t]}{m}+e^{-t\,\delta}\,t\,s'[0]\right]\right\}$$

gibt das Grundgerüst der Lösung an:

Für $f == 0$ wird das *Abklingverhalten* eines Tones beschrieben.

Für $f \neq 0$ muss eine *Laplace-Faltung* mit der inhomogenen Lösung bestimmt werden, um das *Anklingen* und *Klingen* eines Tones zu beschreiben.

1.2.4.2. Erzwingen einer Sinus-Schwingung

Die Laplace-Faltung mit einer Sinus-Schwingung ergibt im *Resonanzfall*:

Lösung[2, Sin] =
$$\int_0^t (s[t-\tau] \text{ /. Lösung[2, schön] /. } \{s[0] \to 0, s'[0] \to 0, \theta[\_] \to 1\}) \operatorname{Sin}[\delta\,\tau]\, d\tau \text{ // FullSimplify}$$

$$\frac{e^{-t\,\delta}\, f\,(1+t\,\delta) - f\operatorname{Cos}[t\,\delta]}{2\,m\,\delta^2}$$

Für große Zeiten ***t*** ergibt sich hier eine reine Sinus-Schwingung mit versetzter Phase:

Lösung[2, Sin] /. $\{e^{-\delta\,t} \to 0\}$ **// Simplify**

$$-\frac{f\operatorname{Cos}[t\,\delta]}{2\,m\,\delta^2}$$

Die Laplace-Faltung mit einer Kosinus-Schwingung ergibt im *Resonanzfall*:

Lösung[2, Cos] =
$$\int_0^t (s[t-\tau] \text{ /. Lösung[2, schön] /. } \{s[0] \to 0, s'[0] \to 0, \theta[\_] \to 1\}) \operatorname{Cos}[\delta\,\tau]\, d\tau \text{ // FullSimplify}$$

$$\frac{f\,(-e^{-t\,\delta}\, t\,\delta + \operatorname{Sin}[t\,\delta])}{2\,m\,\delta^2}$$

Dieser Fall ist komplizierter, weil die angegende Kraft hier schlagartig einsetzt.

Für große Zeiten ***t*** ergibt sich auch hier eine reine Sinus-Schwingung mit versetzter Phase:

ExpandAll[Lösung[2, Cos]] /. $\{e^{-\delta\,t} \to 0\}$ **// Simplify**

$$\frac{f\operatorname{Sin}[t\,\delta]}{2\,m\,\delta^2}$$

Damit ist der *aperiodische Grenzfall* bei erzwungener Schwingung im *Resonanzfall* die interessanteste Lösung und für den Einsatz in einem analytischen Synthesizer am besten geeignet.

Für eine *beliebige* Phase φ bei der sinusförmigen Ansteuerung ergibt sich:

Lösung[2, Sin, φ] =
$$\int_0^t (s[t-\tau] \text{ /. Lösung[2, schön] /. } \{s[0] \to 0, s'[0] \to 0, \theta[\_] \to 1\}) \operatorname{Sin}[\delta\,\tau + \varphi]\, d\tau \text{ // FullSimplify}$$

$$\frac{-f\operatorname{Cos}[t\,\delta+\varphi] + e^{-t\,\delta}\, f\,(\operatorname{Cos}[\varphi] + t\,\delta\operatorname{Cos}[\varphi] - t\,\delta\operatorname{Sin}[\varphi])}{2\,m\,\delta^2}$$

Für große Zeiten ***t*** ergibt sich hier eine reine Sinus-Schwingung mit versetzter Phase:

Lösung[2, Sin, φ] /. $\{e^{-\delta\,t} \to 0\}$ **// Simplify**

$$-\frac{f\operatorname{Cos}[t\,\delta+\varphi]}{2\,m\,\delta^2}$$

Für eine *beliebige* Phase φ bei der kosinusförmigen Ansteuerung ergibt sich:

Lösung[2, Cos, φ] =
$$\int_0^t (s[t-\tau] \,/.\, \text{Lösung}[2, \text{schön}] \,/.\, \{s[0] \to 0, s'[0] \to 0, \theta[\_] \to 1\}) \,\text{Cos}[\delta\,\tau + \varphi] \,d\tau \text{ // FullSimplify}$$

$$\frac{f\,(-e^{-t\,\delta}\,(\text{Sin}[\varphi] + t\,\delta\,(\text{Cos}[\varphi] + \text{Sin}[\varphi])) + \text{Sin}[t\,\delta + \varphi])}{2\,m\,\delta^2}$$

Für große Zeiten ***t*** ergibt sich hier eine reine Sinus-Schwingung mit versetzter Phase:

Lösung[2, Cos, φ] /. {$e^{-\delta\,t} \to 0$} // Simplify

$$\frac{f\,\text{Sin}[t\,\delta + \varphi]}{2\,m\,\delta^2}$$

Über $\boldsymbol{\varphi}$ lässt sich also der *Anschlagton* variieren.

■ 1.2.5. Hinweis

Die hier vorgestellten Rechnungen sind nicht besonders schwer.

In der Kombination von Musikwissenschaft und Nachrichtentechnik ist bisher offenbar der Zusammenhang von *Ursache* und *Wirkung* nicht genügend beachtet worden. Dadurch wurden reine Sinus-Schwingungen für ideale Töne gehalten, was bezüglich der anregenden Kraft (*Ursache*) stimmen mag, nicht jedoch für den als *Wirkung* erzeugten Ton.

Andere Klanganregungen ergeben freilich weitere *charakteristische Töne* eines Musikinstrumentes.

■ 1.3. Protokoll

Die Version von *Mathematica* lautet:

{$Version, $ReleaseNumber, $LicenseID}

{Microsoft Windows 3.0 (October 6, 1996), 0, L4526−3546}

Die Berechnungszeit betrug:

TimeUsed[] "s"
% − $FractionalCalculusTime

25.05 s

23.049 s

Literatur

[1998Stö]
(H.) Stöcker: *Taschenbuch der Physik*, Verlag Harri Deutsch, 3. Auflage, (1998)