Kondensatoren

5. Vorlesung über Grundlagen der Physik II

Auftraggeber:27. 1.2005 Professor Dr. Volker Beck
Bearbeitung: 13. 4.2005 Dr. Norbert Südland
Letzte Berechnung: 13. 4.2005 Dr. Norbert Südland

■ 5.1. Prinzip des Kondensators

■ 5.1.1. Kapazität

■ 5.1.1.1. Phänomenologie

Elektrische Ladung kann auf leitenden Oberflächen gespeichert werden. Wird eine elektrisch leitende Kugel positiv aufgeladen, die andere negativ, so lässt sich auch eine elektrische Spannung zwischen beiden Kugeln nachweisen.

Mit einer Spannungsquelle können die gegenüberliegenden Kugeln ebenfalls aufgeladen werden.

Für eine gegebene Kugel kann umso mehr Ladung getrennt werden, je größer die anliegende elektrische Spannung ist. Es ergibt sich also: $\boldsymbol{Q \sim U}$.

■ 5.1.1.2. Symbol und Einheit

Somit gilt für die Proportionalitätskonstante $\boldsymbol{C}$ (engl.: capacity):

$$\boxed{Q == C\,U} \qquad (5.1)$$

Die Kapazität eines Kondensator ergibt:

$$\boxed{C == \frac{Q}{U} == \frac{\text{Ladung}}{\text{Spannung}}} \qquad (5.2)$$

Als Einheit ergibt sich das *Farad* (nach Michael Faraday benannt) wie folgt:

$$1\,F = 1\,\frac{C}{V} = 1\,\frac{C^2}{\text{kg}}\,\frac{s^2}{m^2} == 1\,\frac{A^2\,s^4}{\text{kg}\,m^2} \qquad (5.3)$$

Diese Einheit ist zunächst einmal wenig anschaulich!

Für handelsübliche Kondensatoren ergeben sich folgende Unter-Einheiten:

$$1\,\mu\text{F} == 10^{-6}\,F \quad 1\,\text{nF} == 10^{-9}\,F \quad 1\,\text{pF} == 10^{-12}\,F \tag{5.4}$$

■ 5.1.1.3. Eigenschaften

Kapazität = gespeicherte positive Ladung pro Spannung.

Sie hängt ab von der Größe, Form und gegenseitigen Lage der beiden mit der Spannungsquelle verbundenen Leiter.

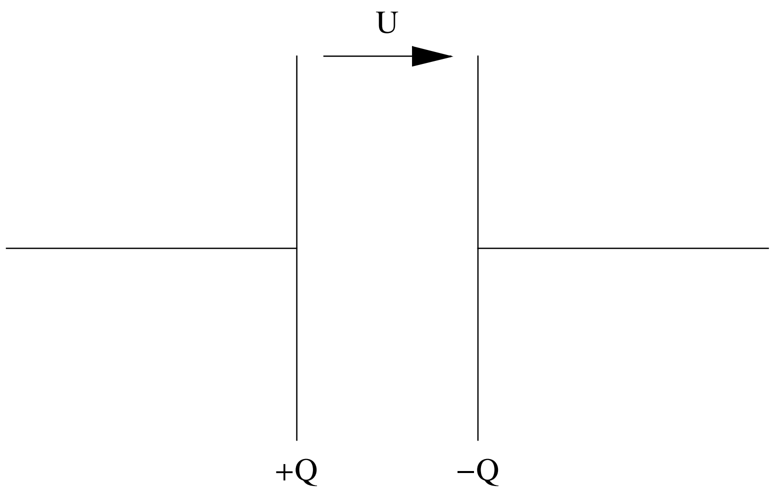
■ 5.1.1.4. Schaltsymbol

Das Schaltsymbol wurde mit Sorgfalt konzipiert, da ein Kondensator eine Unterbrechung des Gleichstromkreises darstellt und außerdem viel Ladung speichern kann:

```
<< Graphics`Arrow`

$DefaultFont = {"Times", 12.};

Show[Graphics[{Line[{{0, 0}, {1 - 1/7, 0}}], Line[{{1 - 1/7, -1}, {1 - 1/7, 1}}],
    Line[{{1 + 1/7, -1}, {1 + 1/7, 1}}], Line[{{1 + 1/7, 0}, {2, 0}}], Arrow[{1 - 1/10, 1}, {1 + 1/10, 1}],
    Text["U", {1, 7/6}], Text["+Q", {1 - 1/7, -7/6}], Text["-Q", {1 + 1/7, -7/6}]}]];
```



■ 5.1.2. Beispiele

■ 5.1.2.1. Allgemeine Formel

Es gibt eine *Verschiebungsdichte* ***D***, die sich oft wie folgt aus dem elektrischen Feld ***E*** berechnen lässt:

$$\vec{D} == \epsilon_r\, \epsilon_0\, \vec{E} \tag{5.5}$$

Dabei ist $\boldsymbol{\epsilon_r == \epsilon}$ die Permittivitätzahl, die vom Material abhängt (Tabelle z.B. [HMS2004], Tabelle 4-7, Seite 277; [Stö1998], Tabelle 19.2/1, Seite 554–555). Die Permittivitätszahl kann auch von der Frequenz des Wechselstroms abhängen. Da gibt es also immer wieder Überraschungen in der Werkstoffkunde.

Für Luft und Vakuum gilt: $\boldsymbol{\epsilon_r == \epsilon == 1}$.

Die Kapazität eines Kondensator berechnet sich allgemein wie folgt ([HMS2004], Formel (4-148), Seite 272):

$$C == \frac{\int \vec{D}.d\vec{A}}{\int \vec{E}.d\vec{s}} \tag{5.6}$$

■ 5.1.2.2. Plattenkondensator

Die gegenüberliegenden Kondensatorplatten haben den Abstand $\boldsymbol{d}$ und jeweils die Fläche $\boldsymbol{A}$. Es wird nur *eine einzige Platte* für die Plattenfläche $\boldsymbol{A}$ gerechnet!

Mit Formel (5.6) ergibt sich für das homogene elektrische Feld:

$$\textbf{Kapazität[Plattenkondensator]} = \left\{C \to \frac{\int \epsilon_0\, \epsilon_r\, E\, dA}{\int E\, dd}\right\}$$

$$\left\{C \to \frac{A\, \epsilon_0\, \epsilon_r}{d}\right\}$$

Eine große Kapazität wird durch folgende Parameter erreicht:

- großes $\boldsymbol{\epsilon_r}$
- großes $\boldsymbol{A}$
- kleines $\boldsymbol{d}$

Die technische Ausführung ist ein sogenannter *Wickelkondensator*, wo mit sehr kleinem $\boldsymbol{d}$ immer abwechselnd eine Metallfolie und eine Plastikfolie zusammengewickelt wurden. Die Formel für den Plattenkondensator gilt in guter Näherung auch für den Wickelkondensator.

■ 5.1.2.3. Kugelkondensator

Mit Formel (5.6) ergibt sich für das elektrische Feld einer leitenden Kugel:

$$\textbf{Kapazität[Kugelkondensator]} = \left\{C \to \frac{\int \epsilon_0\, \epsilon_r\, E\, dA}{\int E\, dr}\right\} /. \{A \to 4\, \pi\, r^2\}$$

$$\{C \to 4\, \pi\, r\, \epsilon_0\, \epsilon_r\}$$

5.1.2.4. Zwei Kugeln

Für zwei Kugeln mit Radius r, deren Mittelpunkte sich im Abstand a voneinander befinden, gilt:

$$\text{Kapazität[ZweiKugeln]} = \left\{C \to 2\,\pi\,\epsilon_0\,\epsilon_r\,r\left(1 + \frac{r\,(a^2 - r^2)}{a\,(a^2 - a\,r - r^2)}\right)\right\}$$

$$\left\{C \to 2\,\pi\,r\left(1 + \frac{r\,(a^2 - r^2)}{a\,(a^2 - a\,r - r^2)}\right)\epsilon_0\,\epsilon_r\right\}$$

5.1.2.5. Tabellen

Diese und weitere Formeln zur Kapazität finden sich bei Hering et al. ([HMS2004], Bild 4-70, Seite 275) oder Stöcker ([Stö1998], Abschnitt 15.7.4, Seite 425-426).

5.2. Eigenschaften des Kondensators

5.2.1. Denkaufgabe

5.2.1.1. Motivation

Zwei Konsensatorplatten werden auseinander gezogen, d.h. d nimmt zu.

Allein durch scharfes Nachdenken kann das Verhalten des Experiments nur schwer erraten werden. Deshalb werden hier die beiden interessanten Fälle abgehandelt:

5.2.1.2. Auseinanderziehen bei verbundener Spannungsquelle

U bleibt konstant wegen der Verbindung.

$E == \frac{U}{d}$ nimmt ab, da d größer wird.

$C == \epsilon_0\,\epsilon_r\,\frac{A}{d}$ nimmt ab, da d größer wird.

$Q == C\,U$ nimmt ab: Ladung fließt ab.

5.2.1.3. Auseinanderziehen ohne Spannungsquelle

Q bleibt konstant, da die Verbindung unterbrochen wurde.

E bleibt konstant (Jede Ladung ist Ausgangspunkt einer Feldlinie; $\vec{E}$ ist im Plattenkondensator homogen).

$C == \epsilon_0\,\epsilon_r\,\frac{A}{d}$ nimmt ab, da d größer wird.

$U == \frac{Q}{C}$ nimmt zu, da C abnimmt.

5.2.2. Kondensator-Schaltungen

5.2.2.1. Parallelschaltung

Werden Kondensatoren parallel geschaltet, so gilt für die gespeicherte Ladung $\boldsymbol{Q_{\mathrm{ges}}}$:

$$Q_{\mathrm{ges}} == \sum_{\mu=1}^{n} Q_\mu \tag{5.7}$$

Nach Formel (5.1) folgt daraus wegen gleichem $\boldsymbol{U}$ für alle Kondensatoren:

$$C_{\mathrm{ges}}\, U == U \sum_{\mu=1}^{n} C_\mu \tag{5.8}$$

Bei Parallelschaltung von Kondensatoren wird die Gesamtkapazität also durch Addition ermittelt:

$$\boxed{C_{\mathrm{ges}} == \sum_{\mu=1}^{n} C_\mu} \tag{5.9}$$

5.2.2.2. Reihenschaltung

Alle Kondensatoren haben dieselbe Ladung, denn die "inneren" Ladungen sind allesamt *Influenzladungen*:

$$U_{\mathrm{ges}} == \frac{Q}{C_{\mathrm{ges}}} == \sum_{\mu=1}^{n} U_\mu == \sum_{\mu=1}^{n} \frac{Q}{C_\mu} \tag{5.10}$$

Daraus folgt für die Ersatzkapazität bei einer Reihenschaltung:

$$\boxed{\frac{1}{C_{\mathrm{ges}}} == \sum_{\mu=1}^{n} \frac{1}{C_\mu}} \tag{5.11}$$

5.2.3. Energiespeicherung eines Kondensators

Für die elektrische Arbeit gilt:

$$dW_{\mathrm{el}} == U[Q]\, dQ \tag{5.12}$$

Beim Kondensator ist die Kapazität $\boldsymbol{C}$ unabhängig vom Aufladezustand, also folgt mit Formel (5.1):

$$\textbf{Arbeit[Kondensator]} = \left\{W \to \int_0^Q U[Q]\, dQ\right\} \textbf{/. Flatten[Solve[}Q == C\, U[Q],\ U[Q]\textbf{]]}$$

$$\left\{W \to \frac{Q^2}{2\, C}\right\}$$

Dieses Ergebnis kann umgerechnet werden:

$$\boxed{W == \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} == \frac{1}{2} Q\, U == \frac{1}{2} C\, U^2} \tag{5.13}$$

Es sagt anschaulich aus, dass bei Laden des Kondensators die Ladung $\boldsymbol{Q == C\, U}$ linear mit $\boldsymbol{U}$ anwächst, wodurch sich die Arbeit als Fläche eines Dreiecks ergibt.

Die Einheitenkontrolle ergibt:

$$[W] == \frac{\mathrm{kg}\, m^2}{s^2} == [Q\, U] == [C\, U^2] == \frac{C^2}{\mathrm{kg}} \frac{s^2}{m^2} \left(\frac{\mathrm{kg}}{C} \frac{m^2}{s^2} \right)^2 \tag{5.14}$$

Dies unterstreicht, dass die *Kapazität* $\boldsymbol{C}$ eines Kondensators eine wenig anschauliche Einheit besitzt.

■ 5.3. Protokoll

Die Version von *Mathematica* lautet:

{$Version, $ReleaseNumber, $LicenseID}

{Microsoft Windows 3.0 (October 6, 1996), 0, 0}

Die Berechnungszeit betrug (in Sekunden):

TimeUsed[]

1.19

Literatur

[HMS2004]
Hering E., Martin R., Stohrer M. *Physik für Ingenieure*, Springer-Verlag Berlin etc., 9. Auflage, (2004)

[Stö1998]
Stöcker H., *Taschenbuch der Physik*, Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main, 3. überarbeitete und erweiterte Auflage, (1998)