Magnetik

6. Vorlesung über Grundlagen der Physik II

Auftraggeber:27. 1.2005 Professor Dr. Volker Beck
Bearbeitung: 20. 4.2005 – 21. 4.2005 Dr. Norbert Südland
Letzte Berechnung: 21. 4.2005 Dr. Norbert Südland
Letzte Korrektur: 27. 4.2005 Dr. Norbert Südland

■ 6.1. Grundlagen

■ 6.1.1. Magnetische Dipole

■ 6.1.1.1. Phänomenologie

- Magnete und einige ihrer Eigenschaften sind seit dem Altertum bekannt, insbesondere die Nützlichkeit bei der Seefahrt.

- Jeder Magnet besitzt einen Nord- und einen Südpol. (Der Nordpol zeigt nach Norden, so dass der "magnetische Nordpol" der Erde eigentlich in der Antarktis liegt.)

- Es gibt keine magnetischen Monopole, sondern immer nur Dipole – bis herunter zu den atomaren Strukturen.

- Kleine magnetische Dipole richten sich in der Nähe von Magneten so aus, als wären diese von Feldlinien um geben, die ihren Ursprung an den Polen haben.

- *Definition*: Die Richtung der magnetischen Feldlinien weist vom Nord- zum Südpol.

■ 6.1.1.2. Konforme Abbildungen?

Das Feld eines idealen Dipols lässt sich mit den konformen Abbildungen einfach zeichnen. Nun besteht allerdings ein Trugschluss in der Annahme, dass damit auch das Feld zweier Dipole durch Superposition gewonnen werden könne. Dies ist ein Trugschluss, der wegen der nichtlinearen Abbildungseigenschaften der konformen Abbildungen nicht funktioniert.

■ 6.1.2. Metrik der Magnetfelder

■ 6.1.2.1. Elektro-Magnetismus

Auch stromführende elektrische Leiter erzeugen ein Magnetfeld um diesen, wobei das Magnetfeld aus geschlossenen, ringförmigen Feldlinien um den stromführenden Leiter besteht.

Rechte-Hand-Regel: Zeigt der Daumen in die technische Stromrichtung, so zeigen die Finger der rechten Hand in die Richtung, in die ein magnetischer Nordpol gezogen wird.

Bei einer stromdurchflossenen Spule vereinigen sich die einzelnen Magnetfeldlinien im Zentrum der Spule zu einem sehr starken gemeinsamen (annähernd homogenen) Magnetfeld.

■ 6.1.2.2. Magnetische Feldstärke *H*

Die magnetische Feldstärke eines stromdurchflossenen Leiters nimmt proportional zu $\frac{1}{r}$ mit dem Abstand r zum Leitermittelpunkt ab. Die Länge $l == 2\pi r$ der betreffenden Feldlinie geht direkt in die Definition der Einheit ein:

$$\boxed{H == \frac{I}{2\pi r}} \tag{6.1}$$

Die Einheit von H ergibt sich zwanglos:

$$[H] == \frac{A}{m} == \frac{C}{m\,s} \tag{6.2}$$

■ 6.1.2.3. Magnetische Flussdichte *B*

In der Praxis wird fast nie mit H gerechnet, sondern vielmehr mit der *magnetischen Flussdichte* bzw. *Induktion* B, die im einfachsten Fall ($\mu == 1$ für Vakuum und Luft) wie folgt mit der magnetischen Feldstärke H zusammenhängt:

$$\boxed{B == \mu\,\mu_0\,H} \tag{6.3}$$

Hierbei ist $\mu_0 == 4\pi * 10^{-7}\,V\,\frac{s}{A\,m}$ die *magnetische Feldkonstante*.

Es gilt folgender Zusammenhang zur Lichtgeschwindigkeit c:

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_0\,\epsilon_0\,\mu\,\epsilon}} \;/.\; \left\{\mu_0 \to 4\pi * 10^{-7}\,\frac{\text{"V" "s"}}{\text{"A" "m"}},\ \epsilon_0 \to 8.854187817 * 10^{-12}\,\frac{\text{"F"}}{\text{"m"}}\right\} \;/.\; \left\{\text{"F"} \to \frac{\text{"A" "s"}}{\text{"V"}}\right\} \;//$$

PowerExpand // *N*[#, 10] &

$$\frac{2.99792458\times 10^8\ \mathrm{m}}{\mathrm{s}\,\sqrt{\epsilon}\,\sqrt{\mu}}$$

Dabei ist $\sqrt{\epsilon\,\mu} == n$ der so genannte *Brechungsindex* einer durchsichtigen Substanz. Die SI-Einheiten für μ_0 und ϵ_0 sind so gewählt, dass sie über die Lichtgeschwindigkeit $c == 299792458\,\frac{m}{s}$ stets beliebig genau berechnet werden können:

$$\mu_0 == 4\,\pi * 10^{-7}\,\frac{V\,s}{A\,m}$$
$$\epsilon_0 == \frac{1}{c^2\,\mu_0} == \frac{625000}{22468879468420441\,\pi}\,\frac{A\,s}{V\,m} \tag{6.4}$$

Die beiden elektromagnetischen Feldkonstanten können jeweils beliebig genau berechnet werden, ohne dass damit eine Aussage über den zugehörigen Versuchsaufbau gemacht wäre:

$$\mathbf{\frac{1}{c^2\,\mu_0}\ /.\ \left\{c \to 299792458\,\frac{\text{"m"}}{\text{"s"}},\ \mu_0 \to 4\,\pi * 10^{-7}\,\frac{\text{"V"}\,\text{"s"}}{\text{"A"}\,\text{"m"}}\right\}}$$

% // *N*[#, 40] &

$$\frac{625000\,\text{A s}}{22468879468420441\,\text{m V}\,\pi}$$

$$\frac{8.854187817620389850536563031710750260601\times 10^{-12}\,\text{A s}}{\text{m V}}$$

Die hier angegebene 40-stellige Genauigkeit wurde noch bei keinem einzigen physikalischen Versuchsaufbau erreicht!

Die Einheit ***T*** (*Tesla*) der magnetischen Flussdichte ergibt:

$$1\,\frac{V\,s}{A\,m}\,\frac{A}{m} == 1\,\frac{V\,s}{m^2} == 1\,T == 1\,\frac{\text{kg}}{C}\,\frac{m^2}{s^2}\,\frac{s}{m^2} == 1\,\frac{\text{kg}}{C}\,\frac{1}{s} \tag{6.5}$$

Die Einheit Tesla hat also in etwa die Bedeutung einer elektromagnetischen *Frequenz*. Auch das ist schwer verständlich, aber hilfreich bei der Einheitenkontrolle.

■ 6.1.2.4. Magnetische Flussdichte *B*

Die Induktion ***B*** eines stromdurchflossenen Leiters ergibt somit:

$$\mathbf{Induktion[Leiterschleife] = \{B \to \mu_0\,H\}\ /.\ \left\{H \to \frac{I}{2\,\pi\,r}\right\}}$$

$$\left\{B \to \frac{I\,\mu_0}{2\,\pi\,r}\right\}$$

■ 6.1.2.5. Lange Spule

Im Innern einer langen Spule ergibt sich mit der Windungszahl ***n*** und der Länge ***l***:

$$\mathbf{Induktion[LangeSpule] = \left\{B \to \mu_0\,\frac{n}{l}\,I\right\}}$$

$$\left\{B \to \frac{I\,n\,\mu_0}{l}\right\}$$

Im Innern einer langen stromdurchflossenen Spule herrscht ein homogenes Magnetfeld.

Der *magnetische Fluss* $\mathbf{\Phi == \int \vec{B}.d\vec{A}}$ lässt sich bei einer langen Spule recht einfach bestimmen und unterstreicht den Begriff *magnetische Flussdichte* $\vec{B}$. Die Einheit des magentischen Flusses ist $\mathbf{1\,V\,s == 1\,Wb}$ (*Weber*), wodurch die Einheit *Tesla* mit $\mathbf{1\,T == 1\,\frac{Wb}{m^2}}$ das Wesen der Flächendichte unterstreicht.

■ 6.1.3. Materie im Magnetfeld

■ 6.1.3.1. Experimenteller Zugang

Eine Spule kann ähnlich wie ein Plattenkondensator mit allerhand Material gefüllt werden, wobei sich hier nun die magnetischen Eigenschaften ändern.

Die Änderung wird durch den Faktor $\mu_r == \mu$ beschrieben.

Über eine stromdurchflossene Spule können insbesondere Eisenteile in der Nähe detektiert werden – z.B. bei der Induktionsschleife an der Ampel.

■ 6.1.3.2. Diamagnetismus $\mu < 1$

Wenn die Substanz das Magnetfeld abschwächt, spricht man von *Diamagnetismus*. Beispiele sind (vgl. [HMS2004], Bild 4-104, Seite 302) **Ag**, **Au**, **Cu**, **Bi**, H_2, N_2.

Der Diamagnetismus taucht vor allem bei Stoffen auf, die aus chemischer Sicht eine *Edelgaskonfiguration* besitzen, also *gesättigte Elektronenpaare*. Die Quantenmechaniker sagen dazu dann *"Der Gesamtspin des Moleküls ist Null."*

Das Schwächen des Magnetfeldes wird als Phänomen durch die *Lenzsche Regel* beschrieben:

> *Das System reagiert so, dass es der elektromagnetischen Ursache der Bewegung entgegen wirkt.*

Im hier diskutierten Fall des Diamagnetismus kommt es also zu einer Abschwächung des Feldes.

■ 6.1.3.3. Paramagnetismus $\mu > 1$, aber $\mu \approx 1$

Eine geringfügige Verstärkung des Magnetfeldes ergibt sich durch Stoffe, deren Elektronenschalen nicht vollständig aufgefüllt sind, also zum Beispiel **Al**, **Pt**, W und O_2. O_2 besitzt zwar Edelgaskonfiguration, aber eine *Doppelbindung*, wodurch ein kleiner magnetischer Dipol entstanden ist, der sich im Magnetfeld ausrichten kann und es dadurch verstärkt.

Die Einzelheiten zu den Elektronenströmen um den Atomkern sind nicht geklärt, deshalb ist die Werkstoffkunde der Theoretischen Physik weiterhin übergeordnet.

■ 6.1.3.4. Ferromagnetismus $\mu >> 1$

Eine deutliche Verstärkung des Magnetfeldes ergeben die *Ferromagnetika*, bei denen auch unter dem Mikroskop ein Unterschied zwischen "magnetisiert" und "entmagnetisiert" festgestellt werden kann:

Es existieren so genannte *Weißsche Bezirke*, die Gruppen gleichgerichteter Elementarmagneten darstellen. Durch ein äußeres Magnetfeld können die Weißschen Bezirke alle in eine bestimmte Richtung ausgerichtet werden.

Ab einer bestimmten Temperatur, dem so genannten *Curiepunkt*, bricht die Ordnung der Weißschen Bezirke wieder zusammen. Das Material ist dann nur noch paramagnetisch.

6.1.3.5. Grenzen der Physik

Das Magnetfeld der Erde wurde in der Vergangenheit auf einen hohen Eisengehalt im Erdinnern zurückgeführt, der dann auch noch die hohe durchschnittliche Dichte der Erde deuten sollte. Das Problem ist, dass es bereits unter einem Vulkan heißer ist, als es die Curietemperatur von Eisen zulässt (vgl. [HMS2004], Tabelle 4-11, Seite 304):

$$\left(\frac{T_C}{\text{"K"}} - 273.15\right)\text{"°C"} \;/.\; \{T_C \to 1042\,\text{"K"}\}$$

768.85 °C

Damit bleibt die alte Wette des Gottes Israels bestehen (vgl. Jeremia 31,37):

37. So spricht der Herr:
Wenn man den Himmel oben kann messen
und den Grund der Erde erforschen,
so will ich auch verwerfen den ganzen Samen Israels,
um alles, das sie thun, spricht der Herr.

Die gottgegebenen Grenzen sollte ein Ingenieur nicht mutwillig in Frage stellen, weil er sich dadurch in der Regel nur selbst betrügt. Ein Interessierter darf freilich nachprüfen, ohne als Ketzer zu gelten (vgl. 1.Thessalonicherbrief 5,21):

21. Prüfet aber Alles und das Gute behaltet.

6.2. Kraft im Magnetfeld

6.2.1. Kraft auf elektrische Ströme

6.2.1.1. Formeln

Rechte-Hand-Regel:

Daumen: $\vec{I}$
Zeigefinger: $\vec{B}$
Mittelfinger: $\vec{F}$

Vektorielle Schreibweise:

$$\vec{F} == l\,\vec{I}\times\vec{B} \tag{6.6}$$

Einheitenkontrolle:

$$m\,A\,\frac{\text{kg}}{A\,s}\,\frac{1}{s} == 1\,\frac{\text{kg}\,m}{s^2} == 1\,N \tag{6.7}$$

Durch das Kreuzprodukt gilt für einen Neigungswinkel $\boldsymbol{\varphi}$ zwischen $\vec{\boldsymbol{B}}$ und $\vec{\boldsymbol{I}}$:

$$F = l\, I\, B\, \mathrm{Sin}[\varphi] \tag{6.8}$$

■ 6.2.1.2. Kraft zwischen zwei elektrischen Strömen

Parallele Ströme (Abstand: $\boldsymbol{d}$) ziehen sich an und antiparallele Ströme stoßen sich ab.

Ursache sind die Magnetfelder, die die Ströme erzeugen, also:

B-Feld am Ort von Draht 2:

$$\textbf{Induktion[1]} = \left\{\boldsymbol{B_1} \to \frac{\boldsymbol{\mu_0}}{\mathbf{2}\,\boldsymbol{\pi}}\,\frac{\boldsymbol{I_1}}{\boldsymbol{d}}\right\}$$

$$\left\{B_1 \to \frac{I_1\,\mu_0}{2\,d\,\pi}\right\}$$

Kraft auf Leiter 2:

$$\textbf{Kraft[2]} = \{\boldsymbol{F_2} \to \boldsymbol{B_1}\,\boldsymbol{I_2}\,\boldsymbol{l}\}\ \textbf{/. Induktion[1]}$$

$$\left\{F_2 \to \frac{l\,I_1\,I_2\,\mu_0}{2\,d\,\pi}\right\}$$

B-Feld am Ort von Draht 1:

$$\textbf{Induktion[2]} = \left\{\boldsymbol{B_2} \to \frac{\boldsymbol{\mu_0}}{\mathbf{2}\,\boldsymbol{\pi}}\,\frac{\boldsymbol{I_2}}{\boldsymbol{d}}\right\}$$

$$\left\{B_2 \to \frac{I_2\,\mu_0}{2\,d\,\pi}\right\}$$

Kraft auf Leiter 1:

$$\textbf{Kraft[1]} = \{\boldsymbol{F_1} \to \boldsymbol{B_2}\,\boldsymbol{I_1}\,\boldsymbol{l}\}\ \textbf{/. Induktion[2]}$$

$$\left\{F_1 \to \frac{l\,I_1\,I_2\,\mu_0}{2\,d\,\pi}\right\}$$

actio = reactio:

$$\boldsymbol{F_1} == \boldsymbol{F_2}\ \textbf{/. Kraft[1] /. Kraft[2]}$$

True

Die Formel

Kraft[1]

$$\left\{F_1 \to \frac{l\,I_1\,I_2\,\mu_0}{2\,d\,\pi}\right\}$$

erläutert, dass sich parallele Ströme anziehen und antiparallele Ströme abstoßen.

■ 6.2.1.3. Drehspulinstrument

Eine Prinzipskizze findet sich bei Hering et al. ([HMS2004], Bild 4-96, Seite 295). In einem statischen Magnetfeld befindet sich eine Spule um einen drehbaren Eisenkern, wobei die Drehbewegung über einen Zeiger ablesbar ist und eine Rückholfeder besitzt.

Fließt nun ein Strom durch die Spule des Drehspulinstruments, so erfährt der stromdurchflossene Leiter auf jeder Seite des Eisenkerns das gleiche Drehmoment aufgrund der Kraft, die ein stromdurchflossener Leiter in einem Magnetfeld erfährt:

Drehmoment = {*M* → *r F* + *r F*} /. {*F* → *B I l n*}

$\{M \to 2\, I\, B\, l\, n\, r\}$

Hier gibt ***n*** die Zahl der Spulenwicklungen an.

Entscheidend ist die Einsicht, dass das Drehmoment proportional zum fließenden Strom ist.

Drehspulinstrumente sind sehr empfindlich, so dass sie auch zur Spannungsmessung verwendet werden. Es gibt dann einen entsprechenden Schalter am Gerät für die einzelnen Messbereiche.

■ 6.2.2. Kraft auf einzelne Elektronen

■ 6.2.2.1. Hinführung zur Lorentzkraft

Die Zahl ***n*** der Elektronen pro Volumen ist bei einem Metall bekannt. ***n*** hat die Einheit $[\,n\,] == \frac{1}{m^3}$.

Das Produkt aus Querschnitt ***A***, Elektronengeschwindigkeit ***v***, Elementarladung ***e*** und der spezifischen Elektronenzahl ***n*** ergibt somit die Stromstärke ***I***:

Stromstärke = {*I* → *n A v* (−*e*)}

$\{I \to -A\, e\, n\, v\}$

Daraus folgt die Kraft auf die fließenden Elektronen:

Kraft[Elektronen] = {*F* → *B I l*} /. Stromstärke

$\{F \to -A\, B\, e\, l\, n\, v\}$

Das Produkt ***A l n* == *N*** ergibt dabei die Elektronenzahl im Leiter.

Vektorielle Schreibweise (*Lorentzkraft*):

$$\vec{F} == (-e)\, \vec{v} \times \vec{B} \qquad (6.9)$$

Diese Kraft tritt auch bei einzelnen Elektronen im Vakuum auf!

■ 6.2.2.2. Geschwindigkeitsfilter

Wird in einer Brownschen Röhre einem Ablenk-Kondensator mit elektrischem Feld $\vec{E}$ ein homogenes Magnetfeld $\vec{B}$ senkrecht dazu und senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Elektronen überlagert, so ergibt sich z.B.:

Elektrische Kraft für ***v* << c** (z.B. nach oben):

Kraft[elektrisch] = {$F_{\mathrm{el}} \to (-e)\,E$}

$\{F_{\mathrm{el}} \to -e\,E\}$

Lorentzkraft auf die bewegten Elektronen (z.B. nach unten):

Kraft[Lorentz] = {$F_L \to (-e)\,v\,B$}

$\{F_L \to -B\,e\,v\}$

Wird der freie Fall im Schwerefeld der Erde vernachlässigt, so ergibt sich für einen geradlinigen Flug zum schmalen Elektronen-Auslass des Geschwindigkeitsfilters:

Solve[F_{el} == F_L /. Kraft[elektrisch] /. Kraft[Lorentz], *v*] // Flatten

$\left\{v \to \frac{E}{B}\right\}$

Es ist also möglich, Oszilloskope oder Beschleuniger mit definierter Elektronengeschwindigkeit zu bauen.

■ 6.2.2.3. Fadenstrahlrohr

In einer kugelförmigen Vakuumröhre befindet sich seitlich eine Glühkathode mit Beschleunigungsanode. Außerdem liegt ein homogenes Magnetfeld so an, dass die Elektronen auf eine Kreisbahn geraten, da die Lorentzkraft als Zentripetalkraft wirkt.

Es gilt (für ***v* << c**):

Betrachtung[1] = $\frac{m\,v^2}{2} == e\,U_A$

$\frac{m\,v^2}{2} == e\,U_A$

Das Vorzeichen von ***e*** spielt bei der Bilanz keine Rolle, da es um messbare Beträge geht:

Betrachtung[2] = $\frac{m\,v^2}{r} == e\,v\,B$

$\frac{m\,v^2}{r} == B\,e\,v$

Aus beiden Betrachtungen folgt für das Verhältnis $\frac{e}{m}$:

Last /@ (Solve[#, *v*] & /@ Betrachtung /@ Range[2])

Solve[Equal @@ (*v* /. % /. {*e* → em *m*}), em] /. $\{\mathrm{em} \to \frac{e}{m}\}$

$$\left\{\left\{v \to \frac{\sqrt{2}\,\sqrt{e}\,\sqrt{U_A}}{\sqrt{m}}\right\}, \left\{v \to \frac{B\,e\,r}{m}\right\}\right\}$$

$$\left\{\left\{\frac{e}{m} \to 0\right\}, \left\{\frac{e}{m} \to \frac{2\,U_A}{B^2\,r^2}\right\}\right\}$$

Das Verhältnis $\frac{e}{m}$ beträgt beim Elektron (vgl. [BS1993], Seite XIX-XX):

$$\frac{e}{m} \;/.\; \{e \to 1.60217733 * 10^{-19}\,\text{"C"},\, m \to 9.1093897 * 10^{-31}\,\text{"kg"}\} \;//\; N[\#, 10]\;\&$$

$$\frac{1.758819617 \times 10^{11}\,\mathrm{C}}{\mathrm{kg}}$$

Die Elementarladung ***e*** wurde mit dem Millikan-Experiment bestimmt, also kann mit dem Fadenstrahlrohr auf die Masse ***m*** des Elektrons geschlossen werden.

■ 6.2.2.4. Massenspektrometer

Verschiedene Ionen (positive oder negative Ladung!) werden mit einer entsprechend gepolten Lochelektrode mit Spannung ***U*** beschleunigt und durch einen Geschwindigkeitsfilter geschickt. Anschließend wird der Strahl in einem homogenen Magnetfeld ***B*** auf einen Detektor abgelenkt, wobei der Abstand der detektierten Linien von der Ionenmasse ***m*** abhängt:

Masse[Ion] = Solve[Betrachtung[2] /. {*e* → *q*}, *m*] // Flatten

$$\left\{m \to \frac{B\,q\,r}{v}\right\}$$

Mit derartigen Versuchsaufbauten wurde die Isotopenverteilung z.B. von Chlor ermittelt: **75.77 %** $^{35}_{17}\mathrm{Cl}$ und **24.23 %** $^{37}_{17}\mathrm{Cl}$, was folgende Molmasse ergibt (vgl. [Mor1987], Kapitel 2, Seite 23):

$$\frac{75.77}{100}\,34.969\,\frac{\text{"g"}}{\text{"mol"}} + \frac{24.23}{100}\,36.966\,\frac{\text{"g"}}{\text{"mol"}}$$

$$\frac{35.4529\,\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}$$

Ein Massenspektrometer arbeitet im nichtrelativistischen Bereich. Massenspektrometer finden auch bei der Analyse von metallischen Werkstoffen Anwendung.

■ 6.3. Protokoll

Die Version von *Mathematica* lautet:

{$Version, $ReleaseNumber, $LicenseID}

{Microsoft Windows 3.0 (October 6, 1996), 0, 0}

Die Berechnungszeit betrug (in Sekunden):

TimeUsed[]

0.83

Literatur

Bibel
"Die Bibel, oder die ganze Heilige Schrift Alten und Neuen Testaments nach der deutschen Uebersetzung Dr. Martin Luthers.", Revision durch Dr. J. Ph. Fresenius, (1751); Druck und Verlag von Heinrich Ludwig Brönner, Frankfurt am Main, 40. Auflage, (1841)

[BS1993]
Hrsg. Niedrig H, *Bergmann/Schaefer Lehrbuch der Experimentalphysik*, Band **3 Optik**, Walter de Gruyter, 9. Auflage, (1993)

[HMS2004]
Hering E., Martin R., Stohrer M. *Physik für Ingenieure*, Springer-Verlag Berlin etc., 9. Auflage, (2004)

[Mor1987]
Mortimer Ch. *Chemie – Das Basiswissen der Chemie*, Georg Thieme Verlag Stuttgart, 5. völlig neu bearbeitete und erweiterte Auflage, (1987)