

# Zusatz (zu Schwingungen)

## 9. Vorlesung über Grundlagen der Physik II

*Auftraggeber:* 27. 1.2005 Professor Dr. Volker Beck

*Bearbeitung:* 6. 6.2005 – 7. 6.2005 Dr. Norbert Südland

*Letzte Berechnung:* 7. 6.2005 Dr. Norbert Südland

*Letzte Korrektur:* 30. 6.2005 Dr. Norbert Südland

### ■ 9.1. Überlagerte Schwingungen

#### ■ 9.1.1. Schwebung

##### ■ 9.1.1.1. Phänomen

Wenn der Geiger sein Instrument stimmt, so erregt er eine Stimmgabel und streicht dazu die a'-Saite. In der Nähe des richtigen Tones fängt das Gemisch aus beiden Tönen an, auffällig stark in der Lautstärke zu vibrieren. Man spricht von einer *Schwebung*.

##### ■ 9.1.1.2. Schwebung von Sinus-Schwingungen

Mathematisch lässt sich die Schwebung über die Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen verstehen:

$$\cos[t \omega_1] + \cos[t \omega_2] == 2 \cos\left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right] \cos\left[\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right] // \text{Simplify}$$

True

Dies bedeutet, dass durch das Zusammenklingen zweier (gleich lauter) Töne ein Ton entsteht, dessen Frequenz das arithmetische Mittel der beiden Frequenzen darstellt:

$$\bar{f} == \frac{f_1 + f_2}{2} \quad (9.1)$$

wobei er mit der Schwebungsfrequenz (vgl. [HMS2004], Formel (5-134), Seite 372; [Stö1998], Abschnitt 9.4.2.2., Seite 259)

$$f_s == |(f_1 - f_2)| \quad (9.2)$$

seine Amplitude verändert. Hierbei wurde kein Faktor  $\frac{1}{2}$  vergessen, sondern als Schwebungsfrequenz gilt der Kehrwert der Dauer, der zwischen zwei Nulldurchgängen (Minima) der Schwebung liegt.

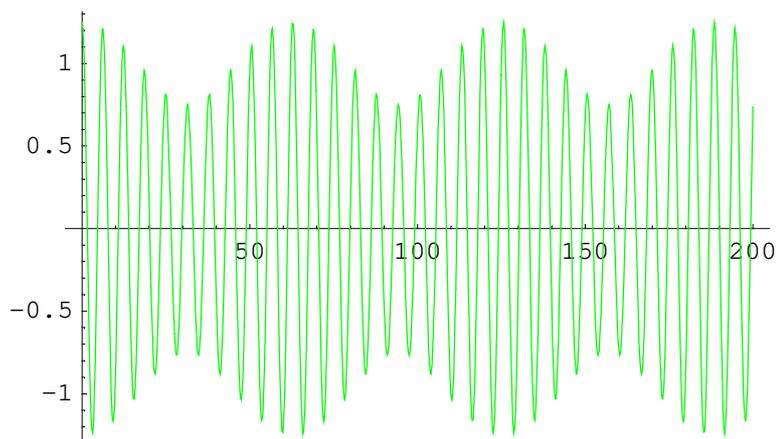
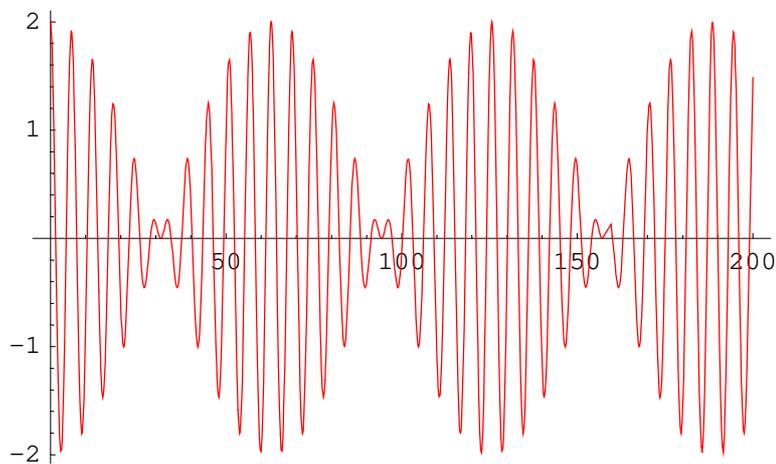
Aus dieser Rechnung wird bereits deutlich, dass zum Stimmen eines Instruments die Schwebungsfrequenz genügend groß eingestellt wird.

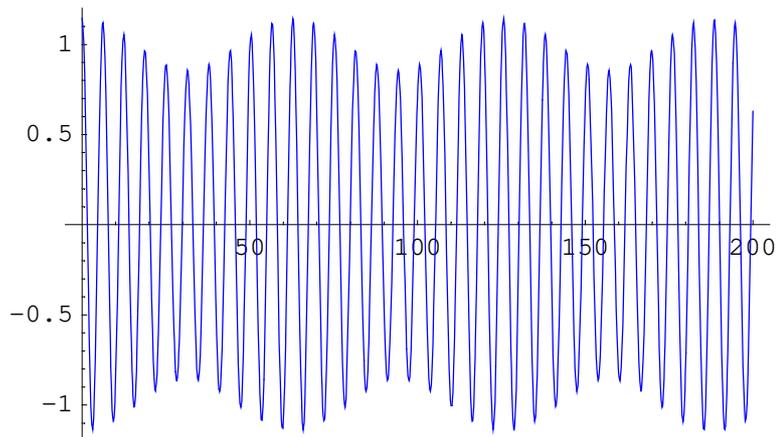
Zum Stimmen einer Quinte muss bei der gleichschwebenden Stimmung (in 12-geteilter Oktave) auf etwa 2 Schwebungen pro Sekunde (nach innen) geachtet werden. Besonders beim Zusammenspiel von Geige und Klavier ist dies sinnvoll und widerspricht der Tradition der Geiger.

### ■ 9.1.1.3. Schaubilder

Eine Schwebung gelingt auch bei verschiedenen großen Amplituden:

```
Plot[Evaluate[Cos[t] +  $\frac{1}{3\# - 2}$  Cos[(1 +  $\frac{1}{10}$ )t]], {t, 0, 200}, PlotStyle -> Hue[ $\frac{\# - 1}{3}$ ]] & /@ Range[3];
```

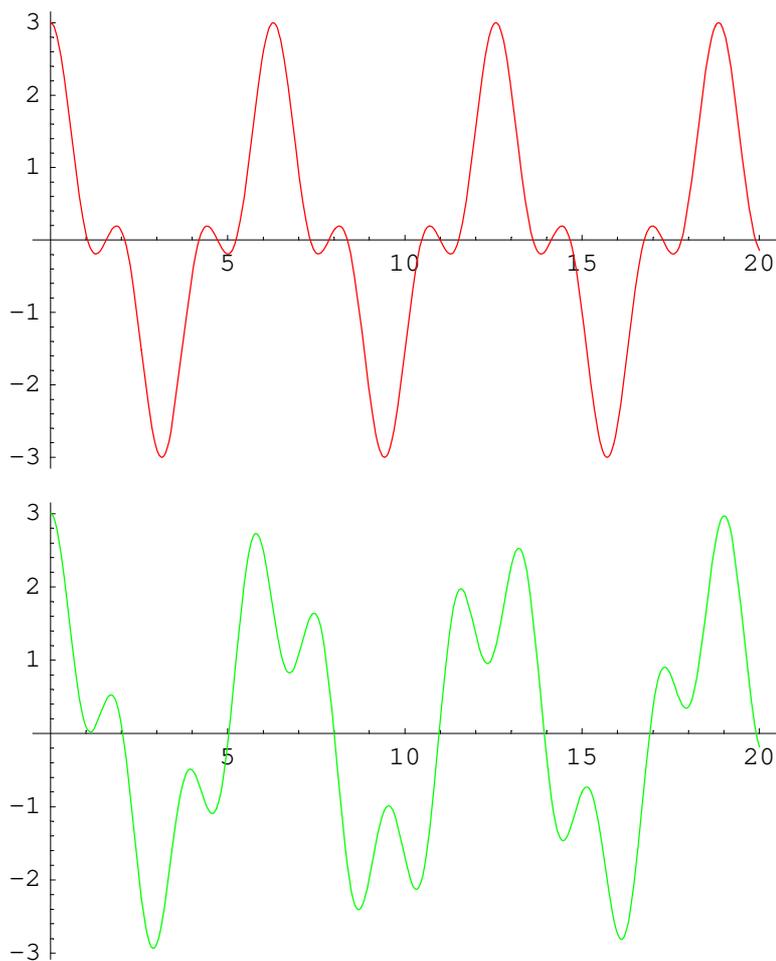


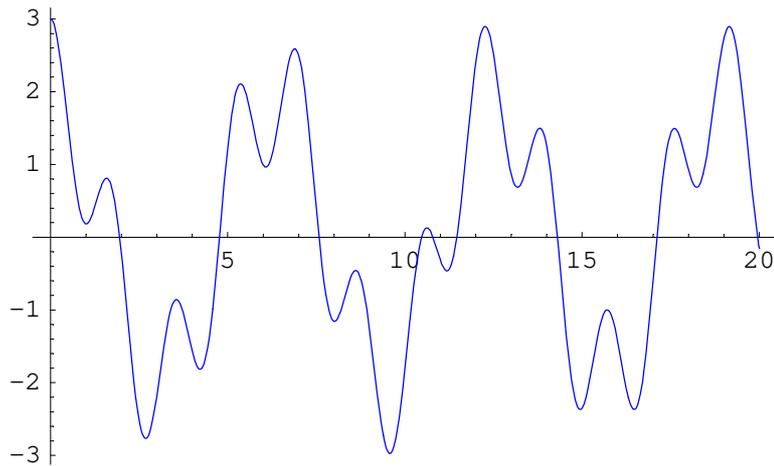


#### ■ 9.1.1.4. Stimmen anderer Intervalle

Bei der Geige werden üblicherweise die Quinten rein gestimmt. Auch bei der Stimmung derartiger Intervalle gibt es Schwebungen, was das folgende Bild veranschaulicht:

`Plot[Evaluate[2 Cos[t] + Cos[3 (1 +  $\frac{\#}{10}$ ) t]], {t, 0, 20}, PlotStyle → Hue[ $\frac{\#}{3}$ ]] & /@ Range[0, 2];`





Die analytische Diskussion dieses Zusammenhangs und die theoretische Ermittlung der Schwebungsfrequenz sind weitaus komplizierter als bei fast gleichen Tönen.

## ■ 9.1.2. Lissajous-Figuren

### ■ 9.1.2.1. Versuchsaufbau

Besonders am Oszilloskop lassen sich periodische Schwingungen mehrdimensional überlagern, indem die horizontale und die vertikale Ablenk-Komponente jeweils eine Sinus-Schwingung als Signal erhält.

Die Ergebnisse für ganzzahlige Frequenzverhältnisse sind geschlossene Kurven, die nach J. Lissajous (1822–1880) benannt sind.

### ■ 9.1.2.2. Phasenverschiebung

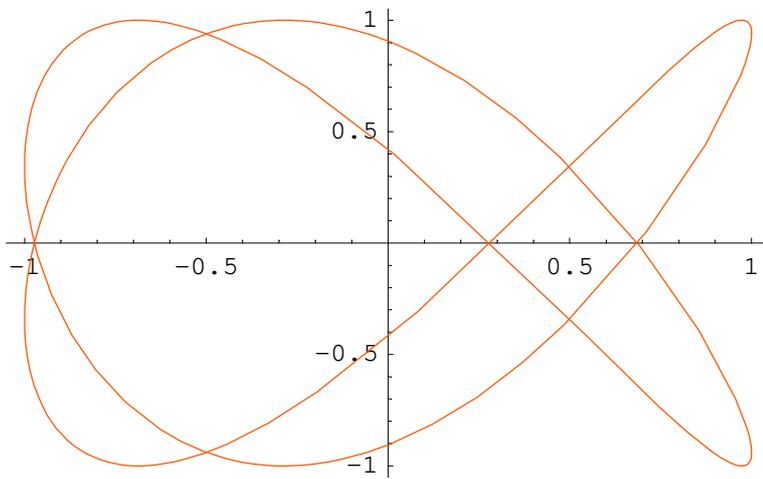
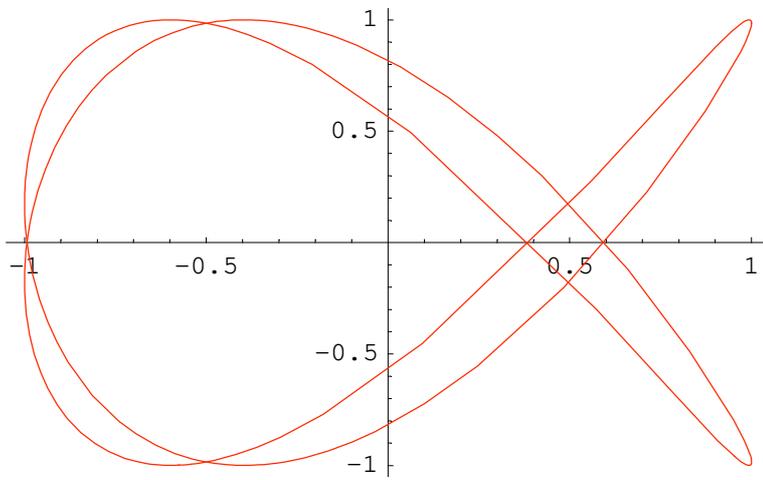
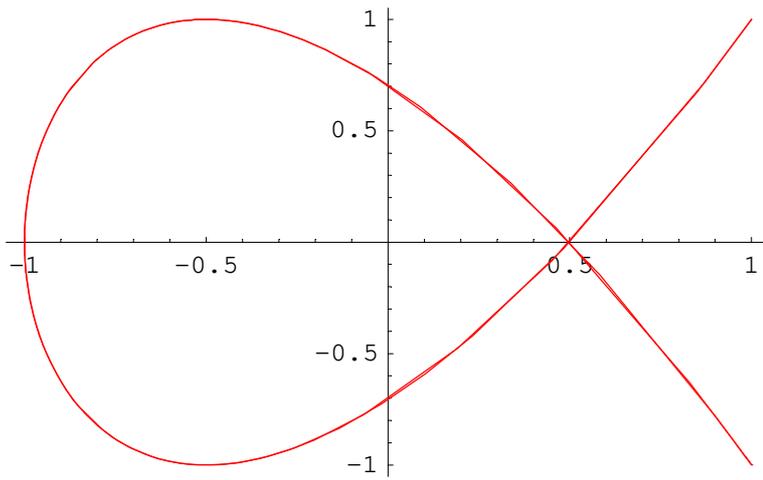
Mit Hilfe der Lissajous-Figuren kann eine Phasenverschiebung (z.B. zweier Wechselströme) direkt gemessen und kalibriert werden.

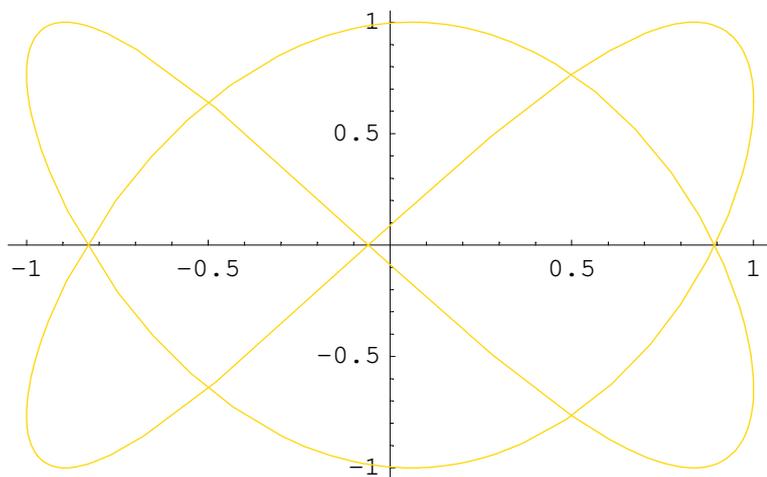
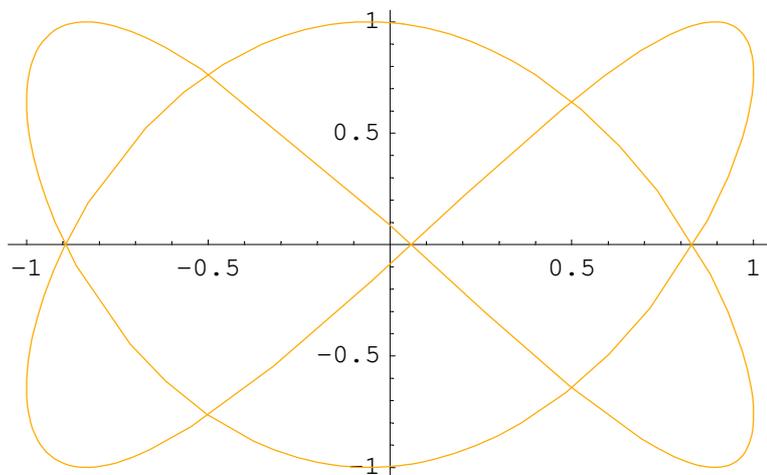
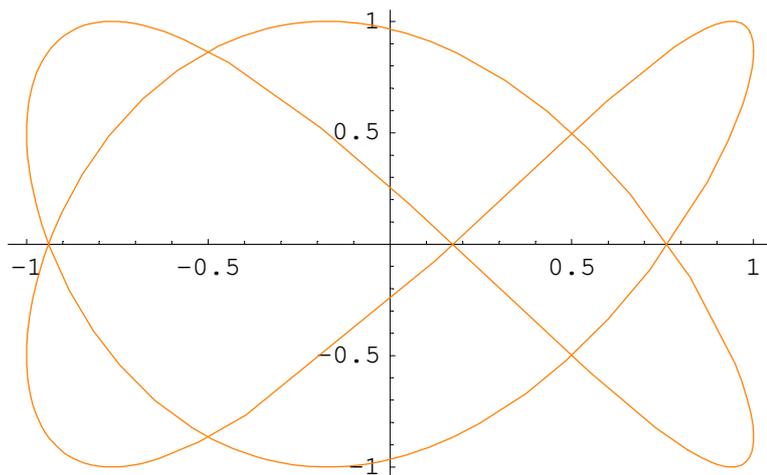
Bei *Mathematica* (und auch im *MathReader*) lässt sich das Drehen der Phase mit Hilfe einer *Animation* visualisieren, wobei dieselbe mit [ Strg ]-[ Y ] gestartet wird.

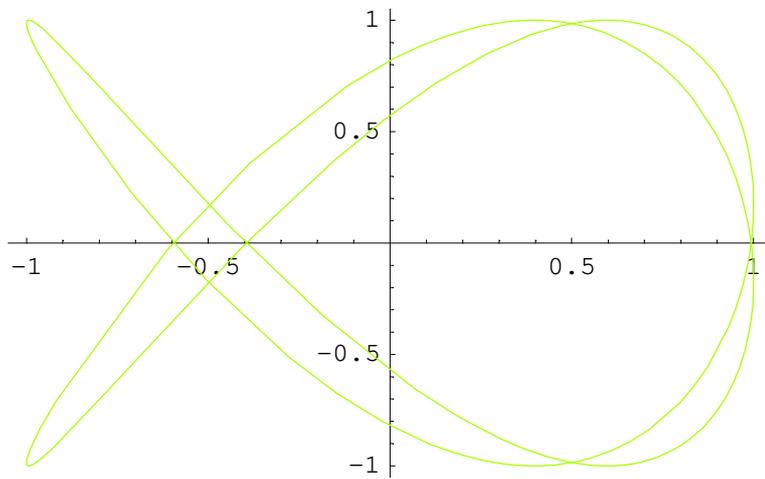
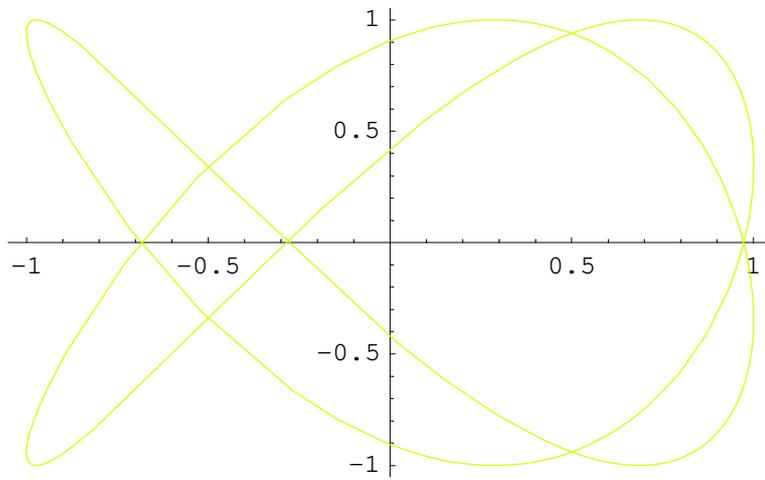
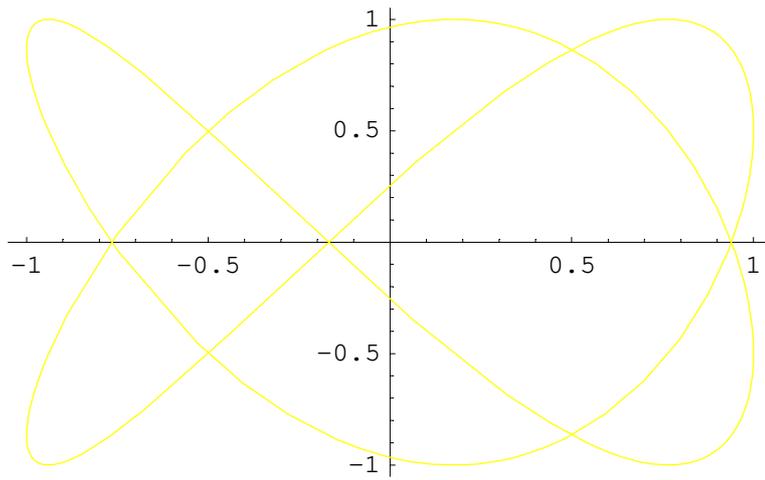
### ■ 9.1.2.3. Bildfolgen

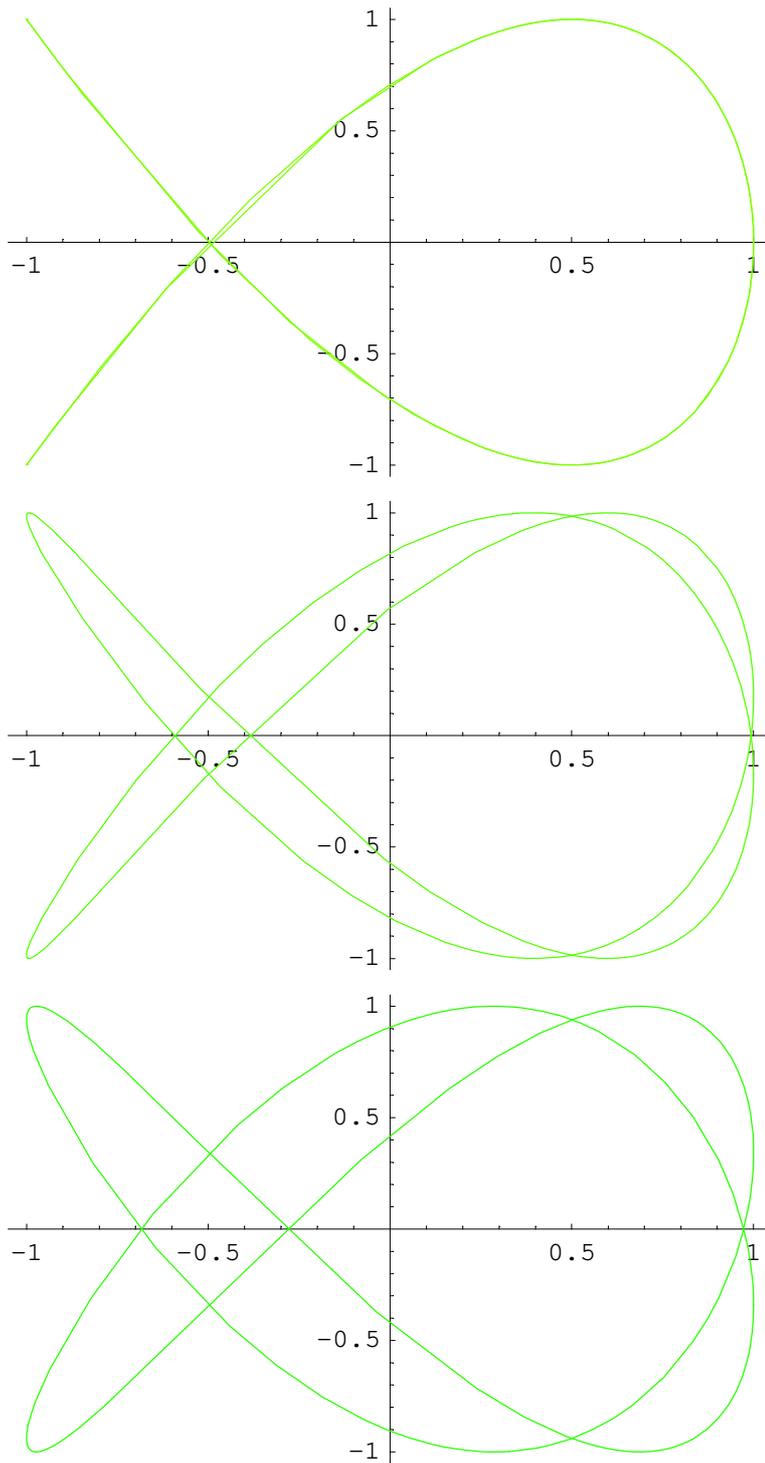
Folgende Bildfolge beschreibt die Drehung eines (aus Draht gebogenen?) geschlossenen Körpers, dessen Projektion immer eine Lissajous-Figur ist:

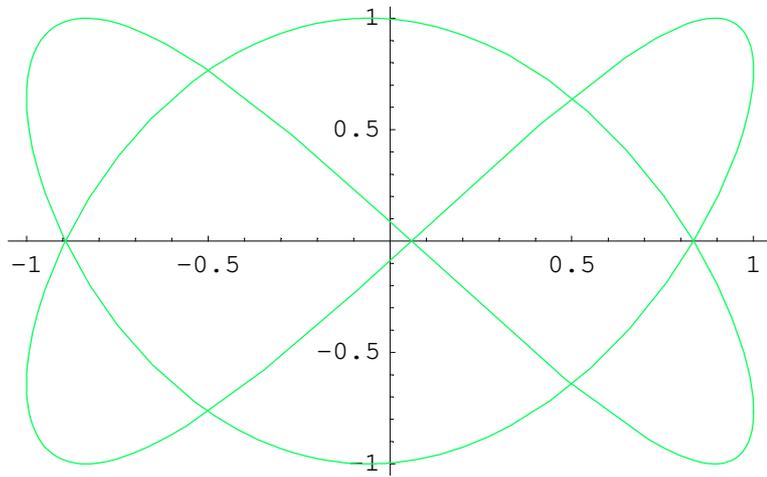
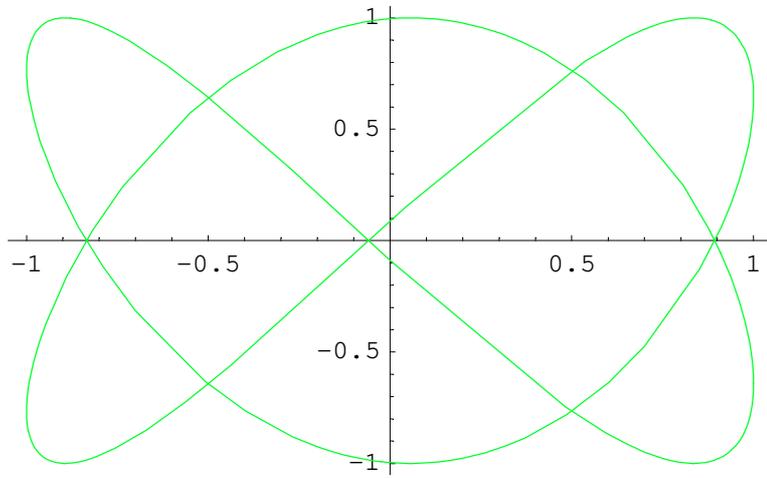
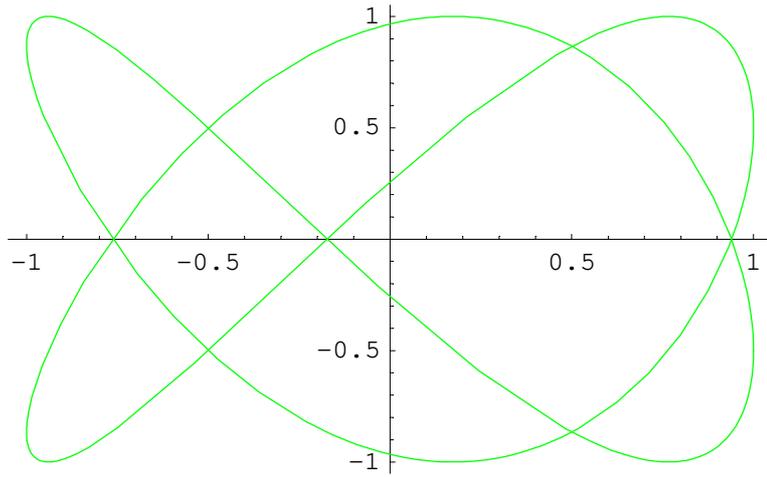
```
ParametricPlot[Evaluate[{Cos[2 t], Cos[3 t + φ]} /. {φ →  $\frac{\# \pi}{180}$ }],
  {t, 0, 2 π}, PlotStyle → Hue[ $\frac{\#}{360}$ ] ] & /@ Range[0, 350, 10];
```

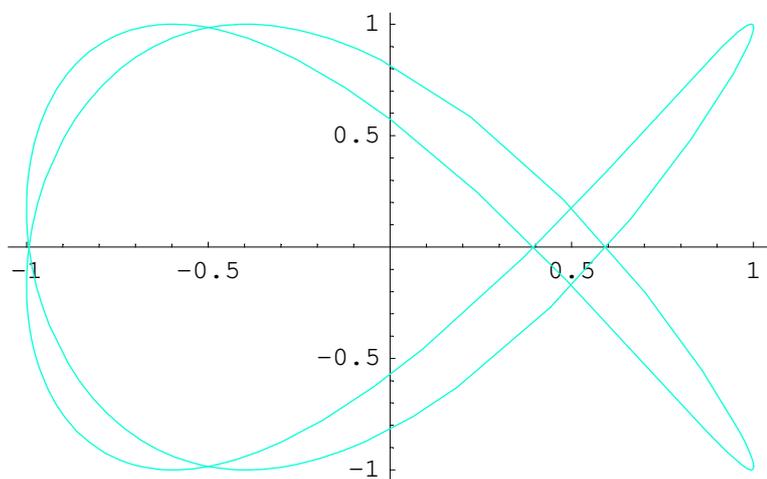
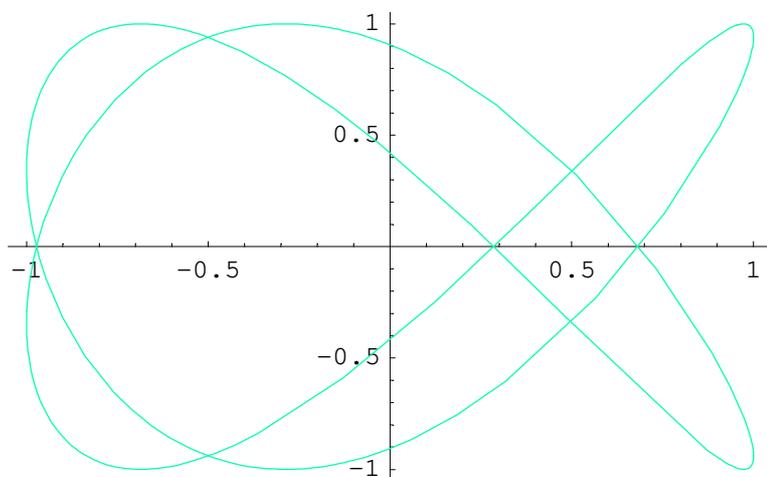
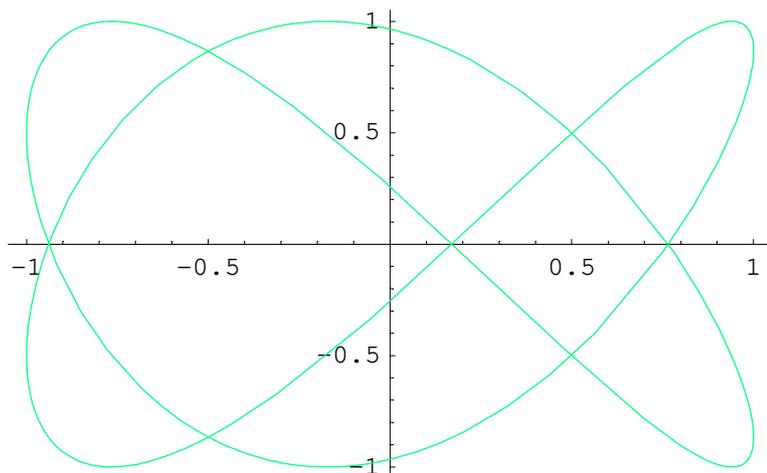


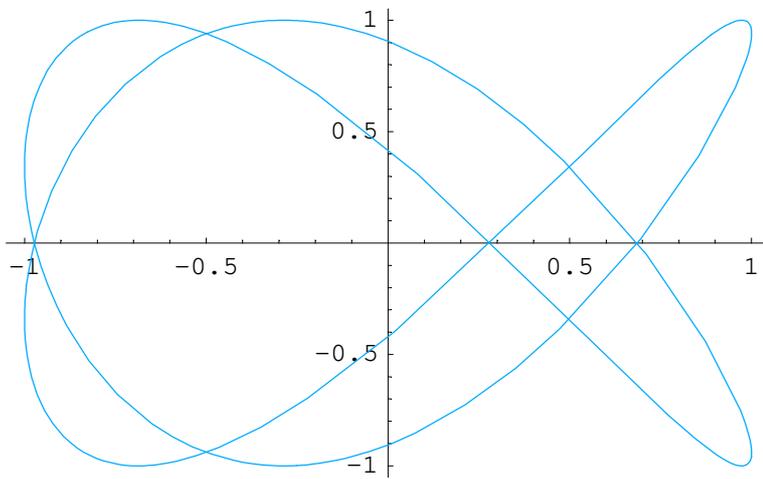
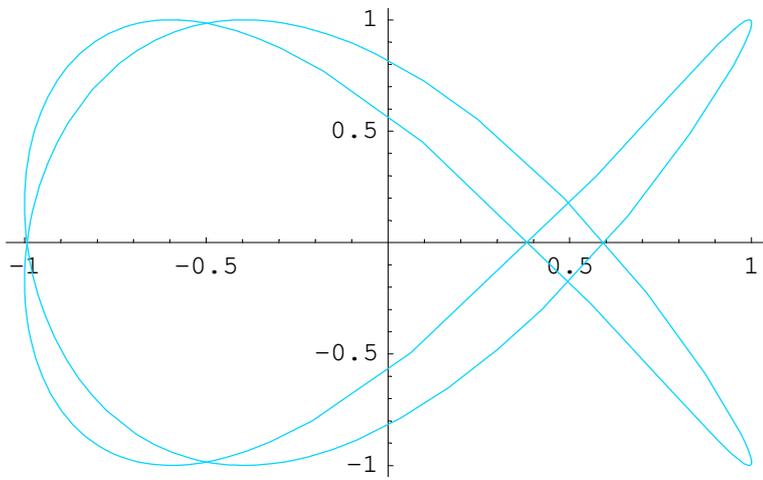
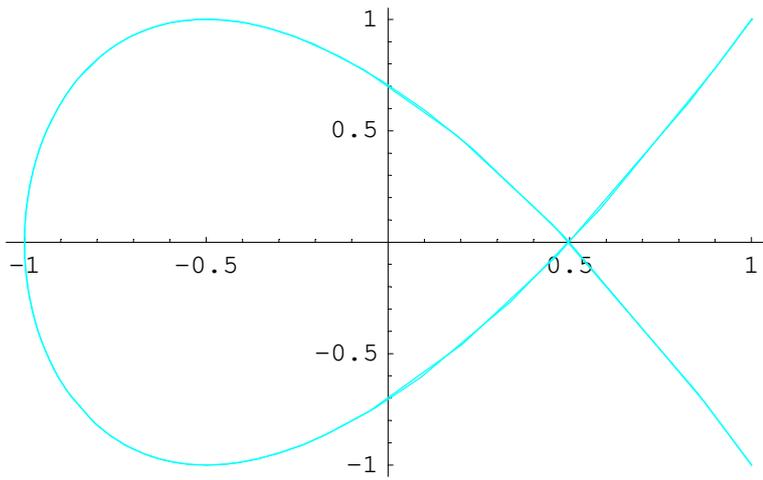


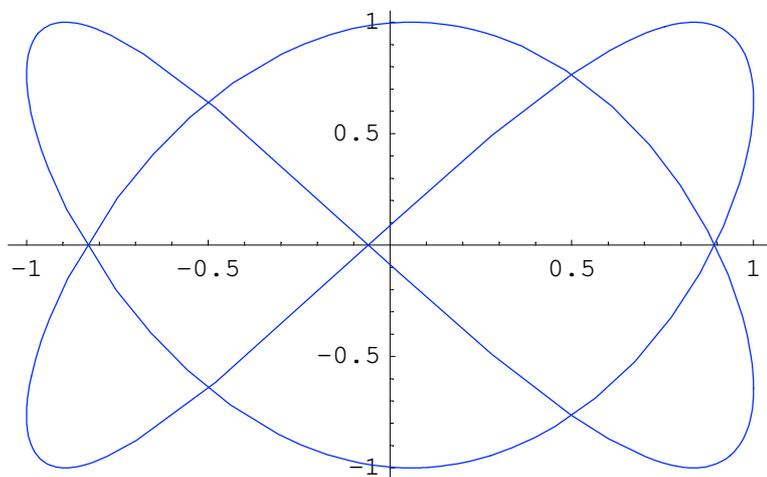
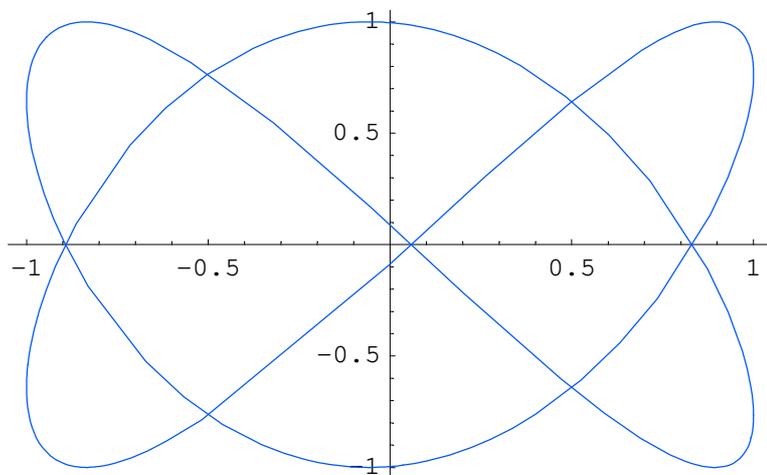
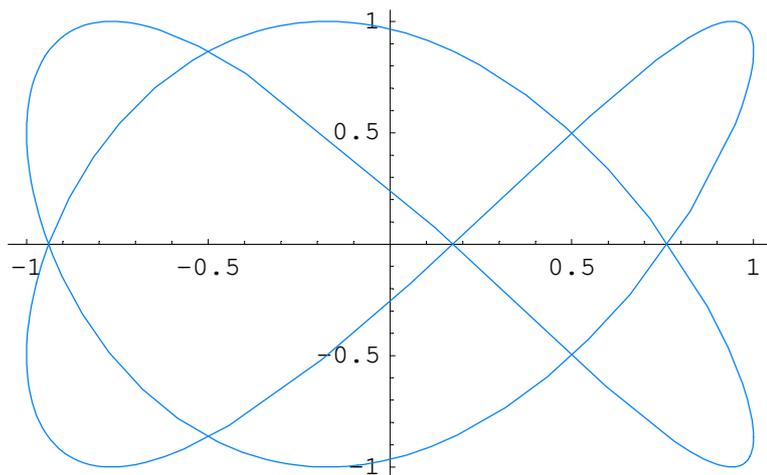


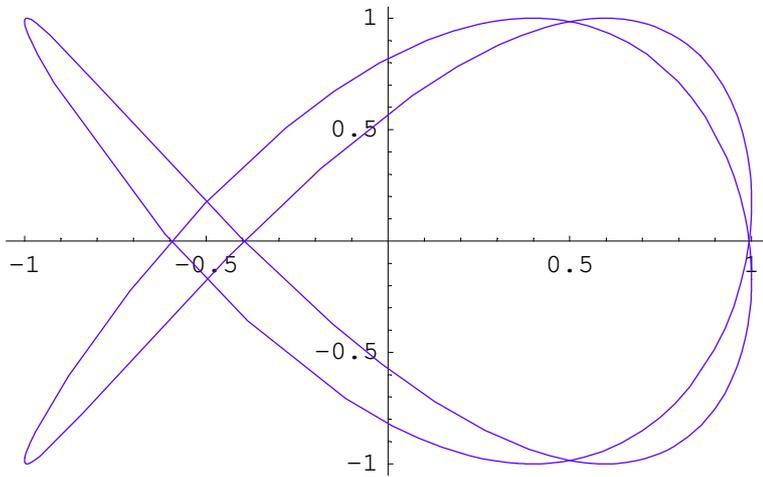
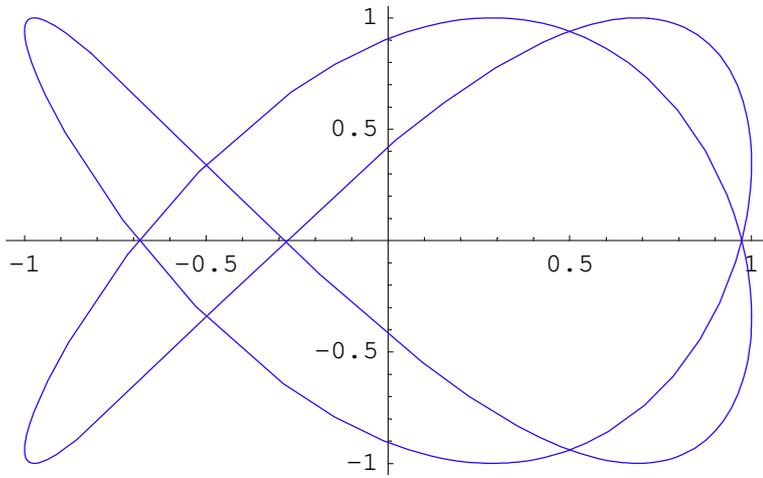
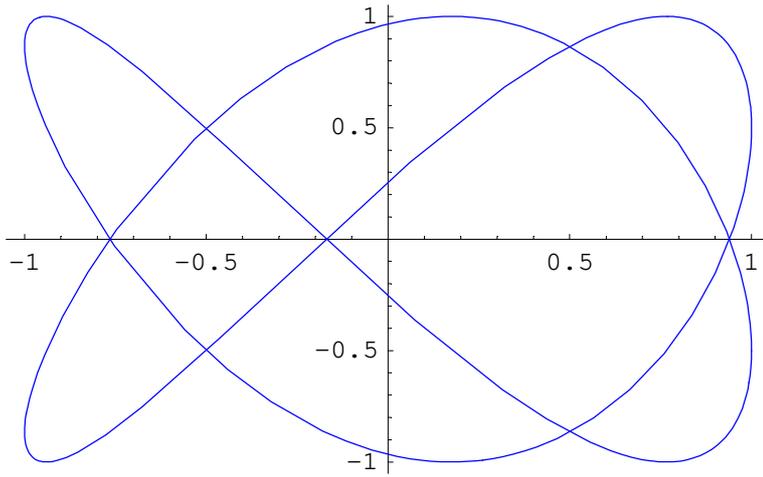


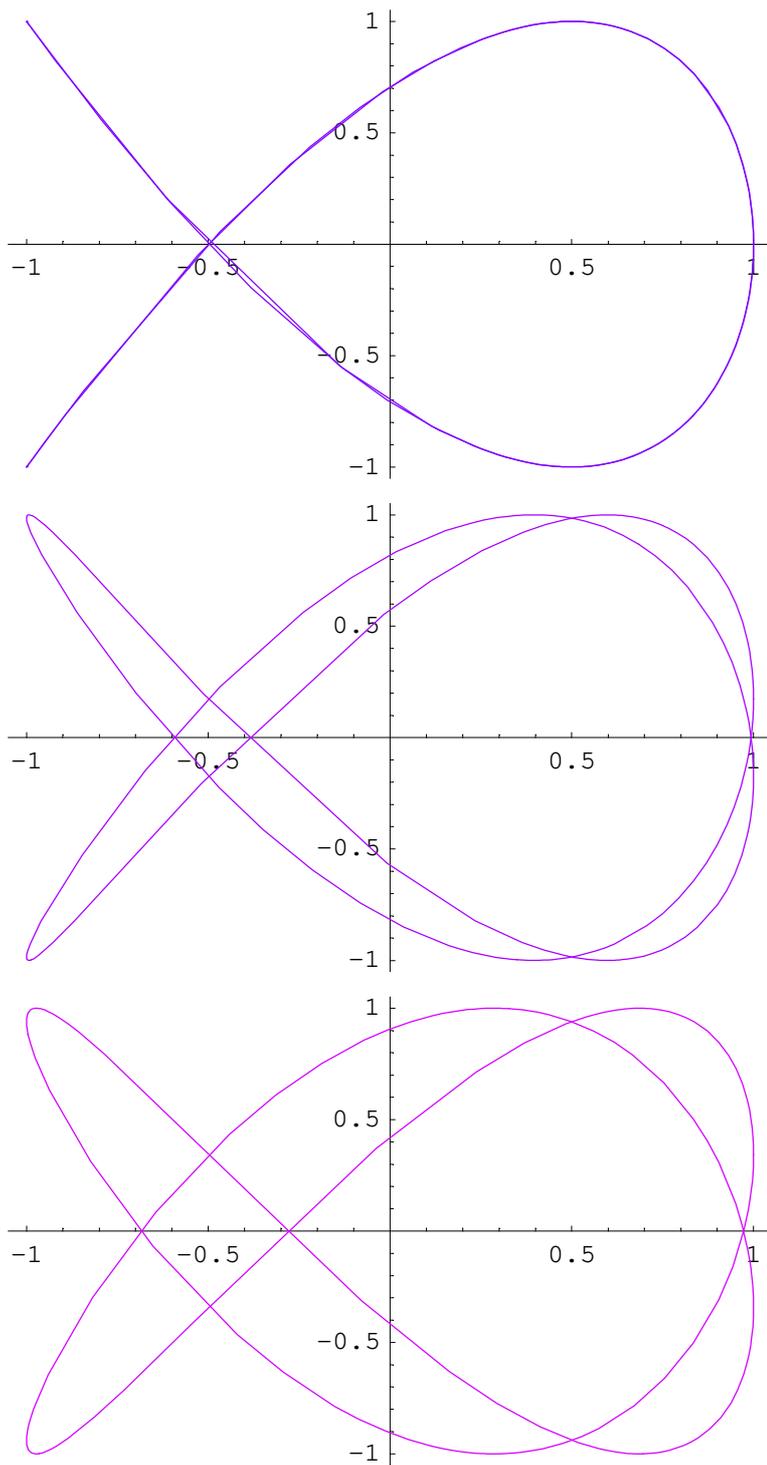


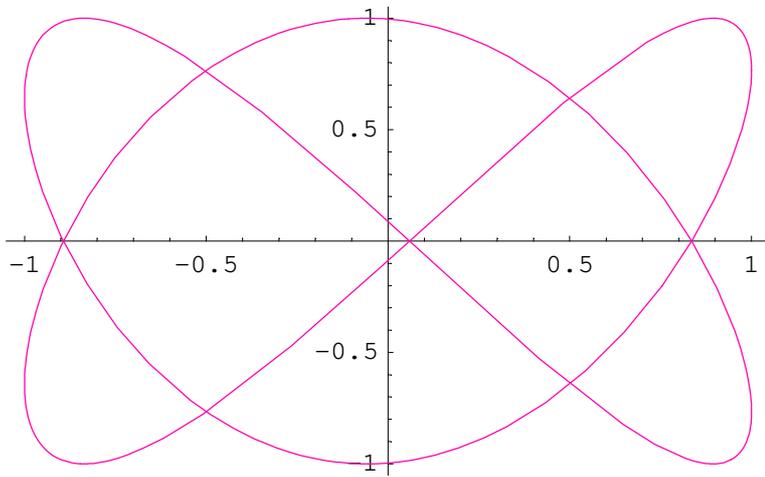
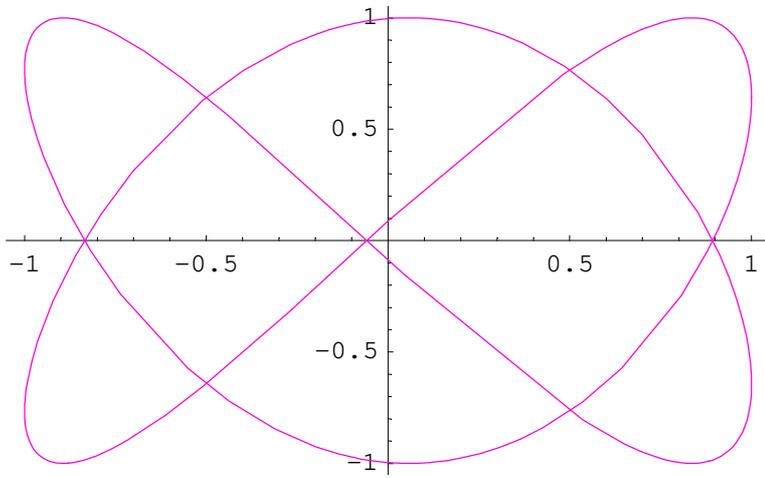
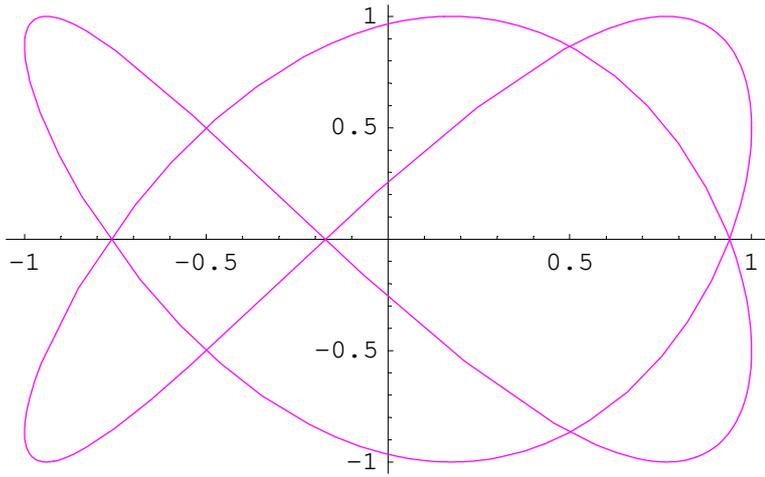


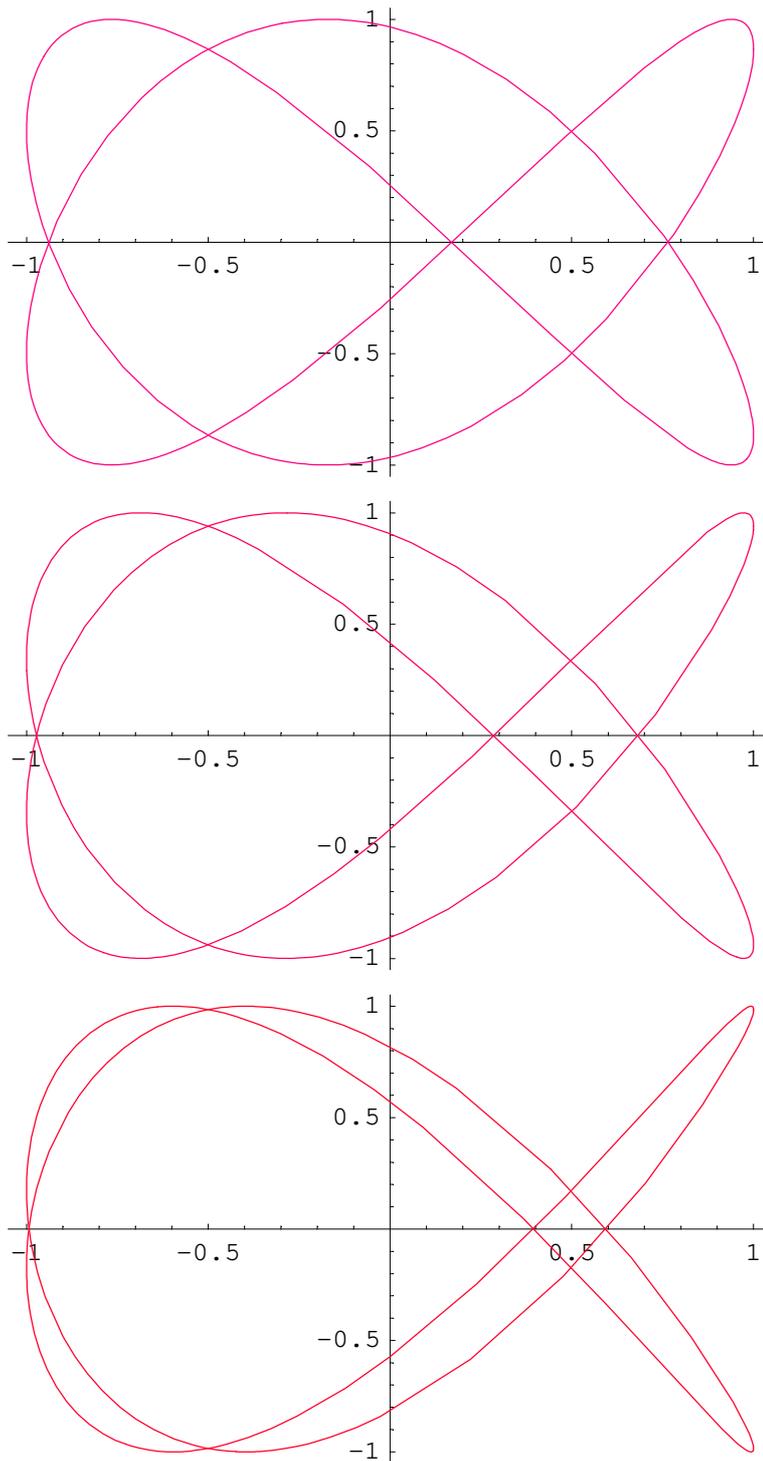












Zum Vergleich siehe Hering et al. ([HMS2004], Bild 5-41, Seite 378).

Derartige Bildfolgen sind als Bildschirmschoner interessant, wobei die Bedeutung für den Phasenabgleich am Oszilloskop durchaus vorhanden ist.

Die Kunst, eine Drahtschleife so zu biegen, dass jede Projektion die Form einer Lissajous-Figur besitzt, ist auch weiterhin nicht einfach zu lösen. Einfacher scheint es, einen Glaszylinder so zu ritzen, dass jede Projektion eine Lissajous-Figur ergibt:

*Es gibt noch viele Produktideen, die noch gar nicht in die Tat umgesetzt wurden.*

## ■ 9.2. Motoren-Konzepte

### ■ 9.2.1. Historie

#### ■ 9.2.1.1. Kurbelwellen-Motor

Seit Erfindung der Dampfmaschine besitzen Motoren in aller Regel eine so genannte *Schubkurbel*, bei der eine *Pleuelstange* und eine *Kurbelwelle* die Stoßbewegung des Kolbens in eine Drehbewegung überführen.

Vorteil:

Eingespielte Produktionsabläufe, sicheres Brot für Alfing und Kessler (beide in Aalen).

Nachteil:

Der Energieumsatz ist nicht optimal, da immer ein Teil der Energie transversal zur Laufrichtung des Kolbens verbraucht wird: Der Motor besitzt erhebliche Schwingungen und muss entsprechend im Motorraum abgedämpft werden.

#### ■ 9.2.1.2. Wankel-Motor

Felix Wankel stürzte sich auch schon an dieser Eigenschaft des Kurbelwellen-Motors und entwickelte einen *Kreiskolben*-Motor, bei dem die Verbrennung in einem drehbaren Verbrennungsraum erfolgt, wodurch die Drehbewegung direkt aufgrund der Explosion erfolgt.

Vorteil:

Hohe Drehzahlen und ruhiger Lauf sind möglich, keine Kurbelwellen-Unwucht.

Nachteil:

Dichtungsprobleme im Bereich des (wandernden) Verbrennungsraums, entsprechend hoher Verbrauch.

#### ■ 9.2.1.3. Kreuzkurbel

Eine Kreuzkurbel besitzt zwei Schieber, die auf Schienen laufen, die ein rechtwinkliges Kreuz bilden. Eine Verbindungsstange zwischen den Schiebern besitzt gerade die halbe Länge jeder Schiene und beschreibt eine gleichmäßige Drehbewegung, wenn die Schieber harmonische phasenversetzte Schwingungen ausführen.

Vorteil:

Keine Kurbelwellen-Unwucht, harmonische Schwingungen der Kolben.

Nachteil:

Geringe Fertigungstoleranzen nötig, Gefahr des Verklemmens ist gegeben.

Diese Konstruktion ist eher geeignet, um eine Drehbewegung in zwei Sinus-Schwingungen zu wandeln. Eine Sinus-Schwingung heißt auch *harmonische Schwingung*.

## ■ 9.2.2. Mathematische Optimierung

### ■ 9.2.2.1. Rollkurven

In der Mathematik existiert folgender Zusammenhang, der bereits bei Rothe ([Rot1954], § 22.10 und § 22.11, Seite 140-141) sehr ausführlich beschrieben wird (Zitat):

*10. Die Hypozykloide entsteht entsprechend durch Bewegung eines Punktes eines Kreises, der innen auf einem festen Kreise derselben Ebene abrollt (zwei Zahnräder, eines mit inneren, das andere mit äußeren Zähnen).*

Es wird folgende Parameter-Darstellung für die sich ergebende Bahnkurve angegeben ([Rot1954], § 22, Gleichung (15), Seite 141):

$$\text{ParameterDarstellung} = \left\{ x \rightarrow (a - b) \cos\left[\frac{b}{a} t\right] + c \cos\left[\frac{a - b}{a} t\right], y \rightarrow (a - b) \sin\left[\frac{b}{a} t\right] - c \sin\left[\frac{a - b}{a} t\right] \right\};$$

**ParameterDarstellung // MatrixForm**

$$\begin{pmatrix} x \rightarrow c \cos\left[\frac{(a-b)t}{a}\right] + (a - b) \cos\left[\frac{bt}{a}\right] \\ y \rightarrow -c \sin\left[\frac{(a-b)t}{a}\right] + (a - b) \sin\left[\frac{bt}{a}\right] \end{pmatrix}$$

Im Lehrbuch wird weiter ausgeführt ([Rot1954], § 22.11, Seite 141):

*11. Besondere Fälle. a) Für  $b = \frac{1}{2} a$  wird die Hypozykloide*

$$\text{Sonderfall} = \text{ParameterDarstellung} /. \left\{ b \rightarrow \frac{a}{2} \right\} // \text{Simplify};$$

**Sonderfall // MatrixForm**

$$\begin{pmatrix} x \rightarrow \frac{1}{2} (a + 2c) \cos\left[\frac{t}{2}\right] \\ y \rightarrow \frac{1}{2} (a - 2c) \sin\left[\frac{t}{2}\right] \end{pmatrix}$$

*d. h. der Punkt P bewegt sich auf einer Ellipse mit den Halbachsen  $\frac{1}{2} a + c$  und  $\frac{1}{2} a - c$ . Ist noch  $c = \frac{1}{2} a$ , so wird*

$$\text{GesuchterFall} = \text{ParameterDarstellung} /. \left\{ b \rightarrow \frac{a}{2}, c \rightarrow \frac{a}{2} \right\} // \text{Simplify};$$

**GesuchterFall // MatrixForm**

$$\begin{pmatrix} x \rightarrow a \cos\left[\frac{t}{2}\right] \\ y \rightarrow 0 \end{pmatrix}$$

*P bewegt sich auf der x-Achse, sein Gegenpunkt also auf der y-Achse hin und her. Dieser Mechanismus wird beim Planetengetriebe benutzt, um eine drehende Bewegung in eine elliptische oder eine geradlinige zu verwandeln.*

### ■ 9.2.2.2. Zuordnung

Der Spezialfall mit der Sinusschwingung, die freilich auch in eine gleichförmige Drehbewegung überführt werden kann, führt auf einen Kurbelwellen-freien Motor, den Harald Kah (der Konstrukteur des Ford KA) 1995 als *Südländ-Motor* bezeichnet (und bestellt) hat:

Diese Konstruktion stellt eine Fliehkraft-optimierte Kreuzkurbel dar, die als Planetenrad ausgeführt ist.

### ■ 9.2.2.3. Konkreter Doppelboxer-Motor

Zwei Planetenzahnräder laufen nebeneinander gegenläufig im Kreis, wenn die Kolbenstange des Verbrennungszyinders eine Sinus-Schwingung ausführt. Auf jeder Seite der Kolbenstange befindet sich ein Verbrennungsraum (Boxer-Motor).

Zwei derartige Einheiten werden so kombiniert, dass die beiden Kolbenstangen gegenphasig schwingen, also um  $\pi = 180^\circ$  versetzt.

Wird diese Einheit durch eine weitere Vier-Zylinder-Einheit ergänzt, die den dritten und vierten Takt zündet, so ist ein ruhig laufender 4-Takt-Motor mit 8 Zylindern bzw. 4 Doppelzylindern entstanden.

### ■ 9.2.2.4. Eigenschaften eines Südland-Motors

Der beschriebene Doppelboxer-Motor besitzt im Idealfall keine Motor-Schwingung nach außen, da zu jeder Zeit Kräftegleichgewicht herrscht. Das Gesamtdrehmoment des Motors ist (ohne Belastung) Null, da zu jeder Zeit ein Paar gegenläufig drehender Räder existiert.

### ■ 9.2.2.5. Animation

Mit *Mathematica* lässt sich auch eine kleine Animation erstellen, die das Funktionsprinzip veranschaulicht, wie es zur Drucklegung von [Rot1954] noch nicht möglich war:

```
$DefaultFont = {"Times", 12.};
```

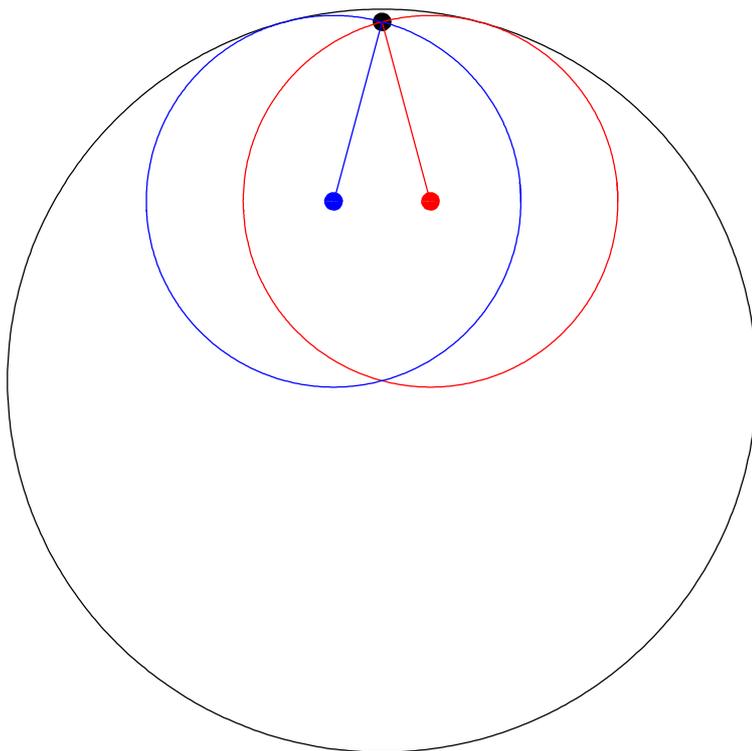
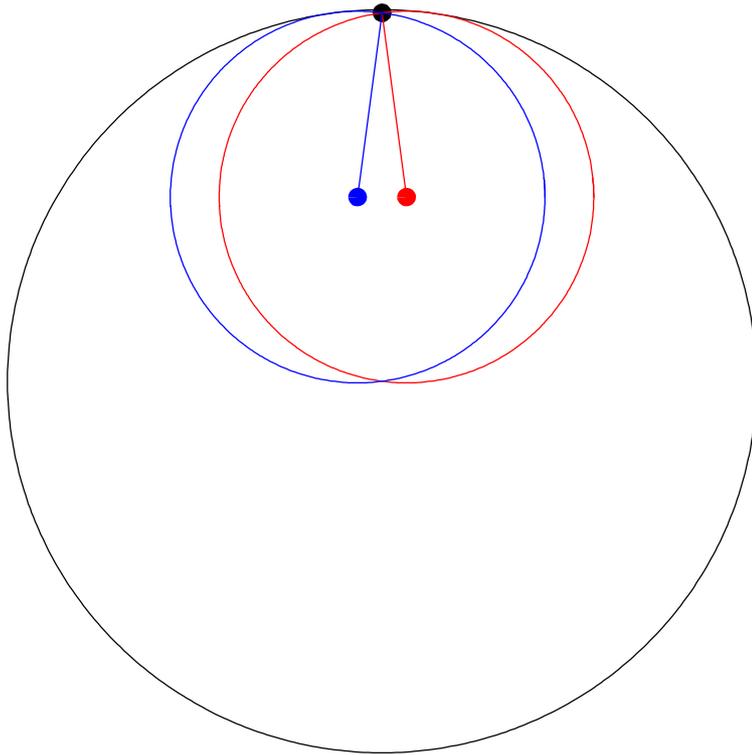
```
Anzahl = 48;
```

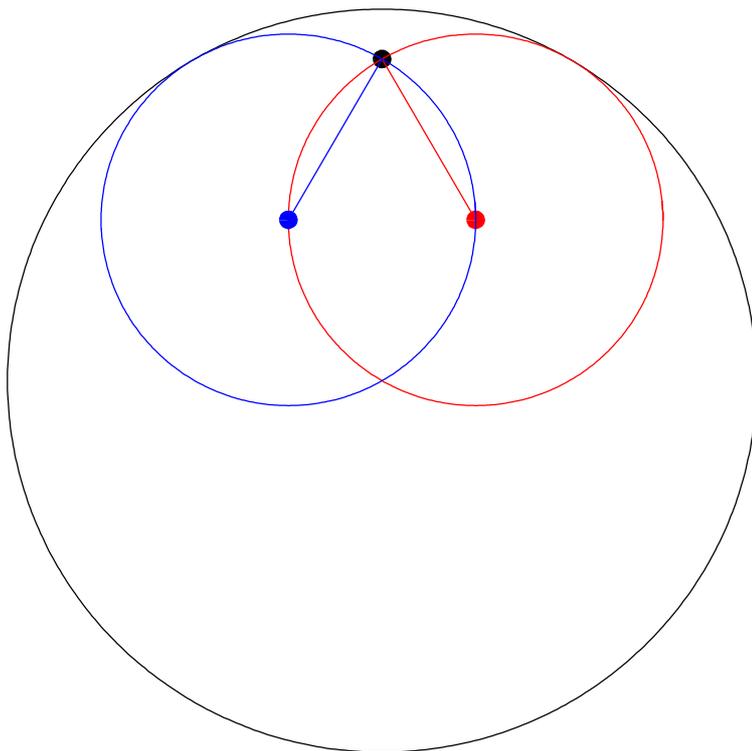
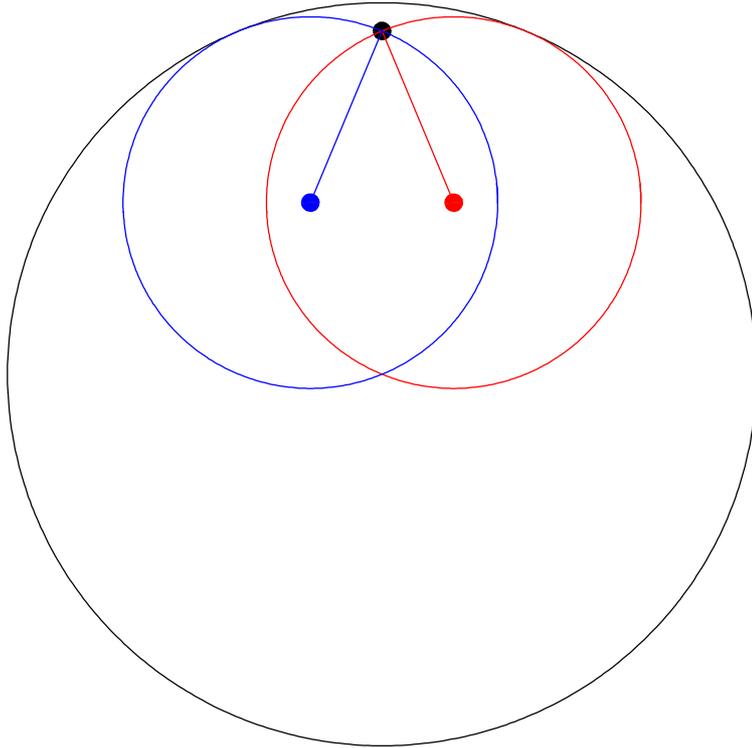
```
Drehung =
```

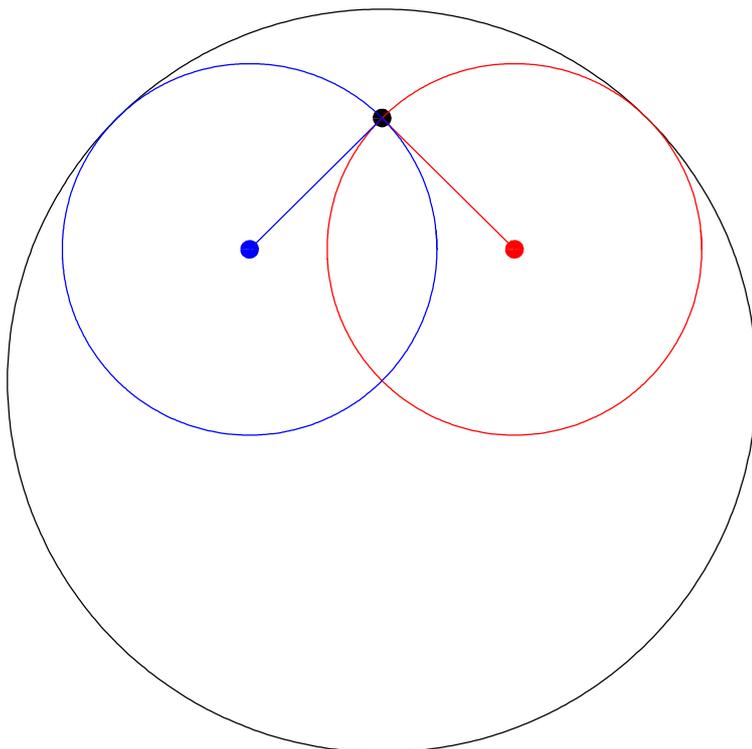
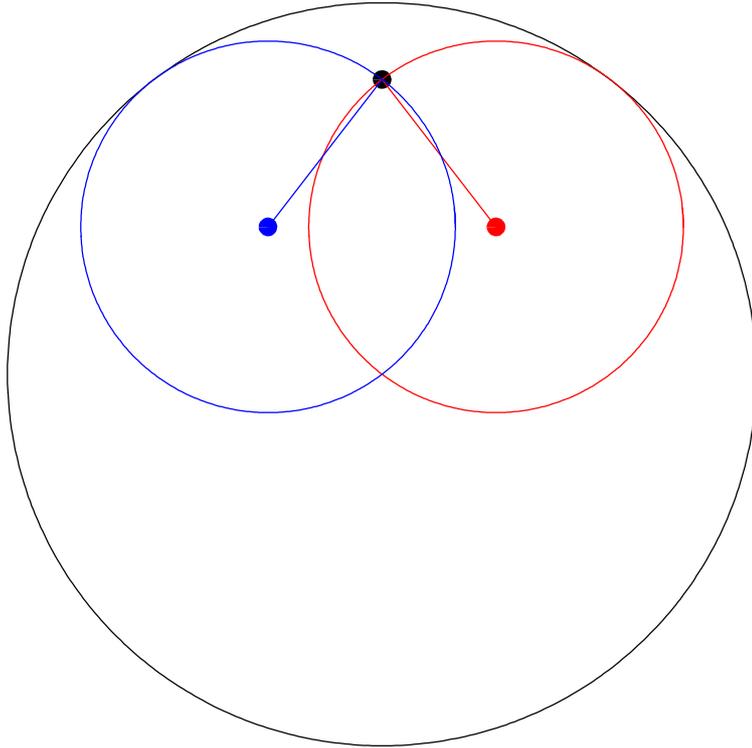
```
{GrayLevel[0], Circle[{0, 0}, 2], Disk[{0, 2 Cos[ $\frac{2 \pi \#}{\text{Anzahl}}$ ]],  $\frac{1}{20}$ ], Hue[0], Circle[{Sin[ $\frac{2 \pi \#}{\text{Anzahl}}$ ],
Cos[ $\frac{2 \pi \#}{\text{Anzahl}}$ ]], 1], Line[{{0, 2 Cos[ $\frac{2 \pi \#}{\text{Anzahl}}$ ]], {Sin[ $\frac{2 \pi \#}{\text{Anzahl}}$ ], Cos[ $\frac{2 \pi \#}{\text{Anzahl}}$ ]]}],
Disk[{Sin[ $\frac{2 \pi \#}{\text{Anzahl}}$ ], Cos[ $\frac{2 \pi \#}{\text{Anzahl}}$ ]],  $\frac{1}{20}$ ], Hue[ $\frac{2}{3}$ ], Circle[{-Sin[ $\frac{2 \pi \#}{\text{Anzahl}}$ ], Cos[ $\frac{2 \pi \#}{\text{Anzahl}}$ ]],
1], Line[{{0, 2 Cos[ $\frac{2 \pi \#}{\text{Anzahl}}$ ]], {-Sin[ $\frac{2 \pi \#}{\text{Anzahl}}$ ], Cos[ $\frac{2 \pi \#}{\text{Anzahl}}$ ]]}],
Disk[{-Sin[ $\frac{2 \pi \#}{\text{Anzahl}}$ ], Cos[ $\frac{2 \pi \#}{\text{Anzahl}}$ ]],  $\frac{1}{20}$ ]} & /@ Range[Anzahl];
```

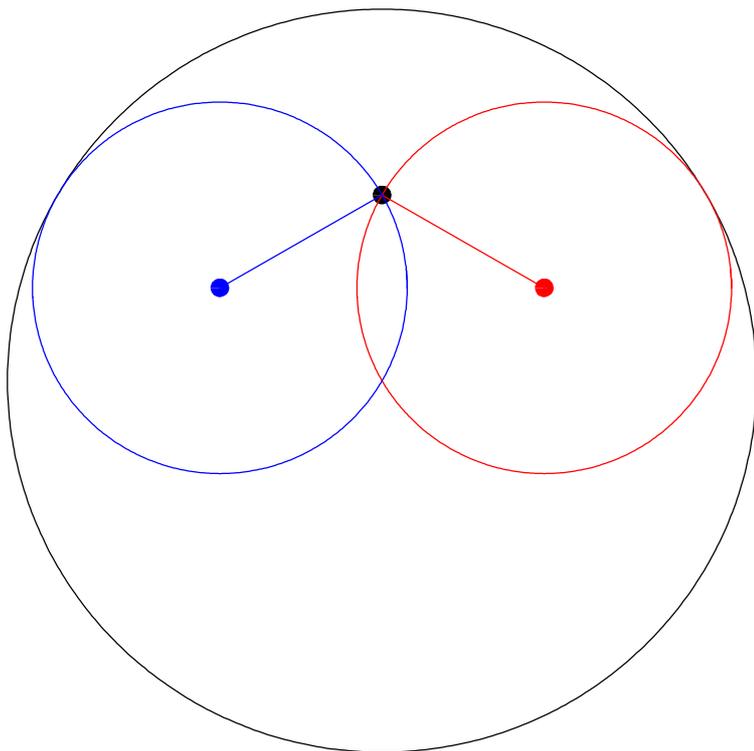
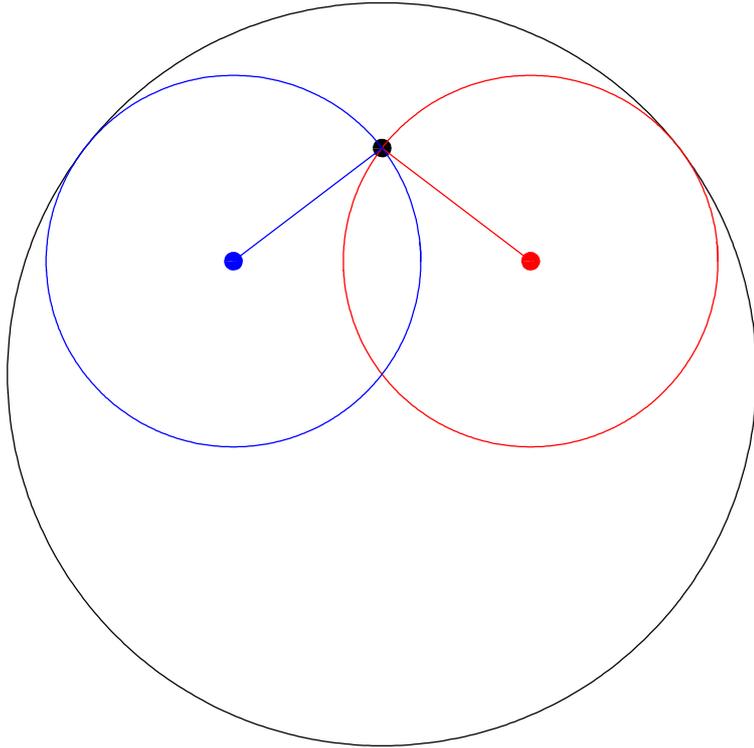
```
Show[Graphics[#], AspectRatio → Automatic, PlotRange → {{ $-\frac{41}{20}$ ,  $\frac{41}{20}$ }, { $-\frac{41}{20}$ ,  $\frac{41}{20}$ }}] & /@
```

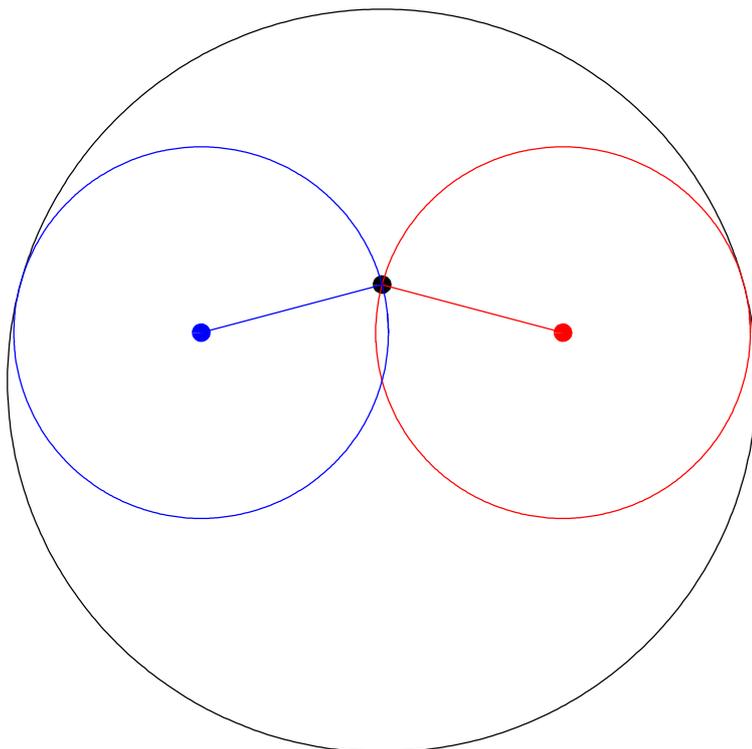
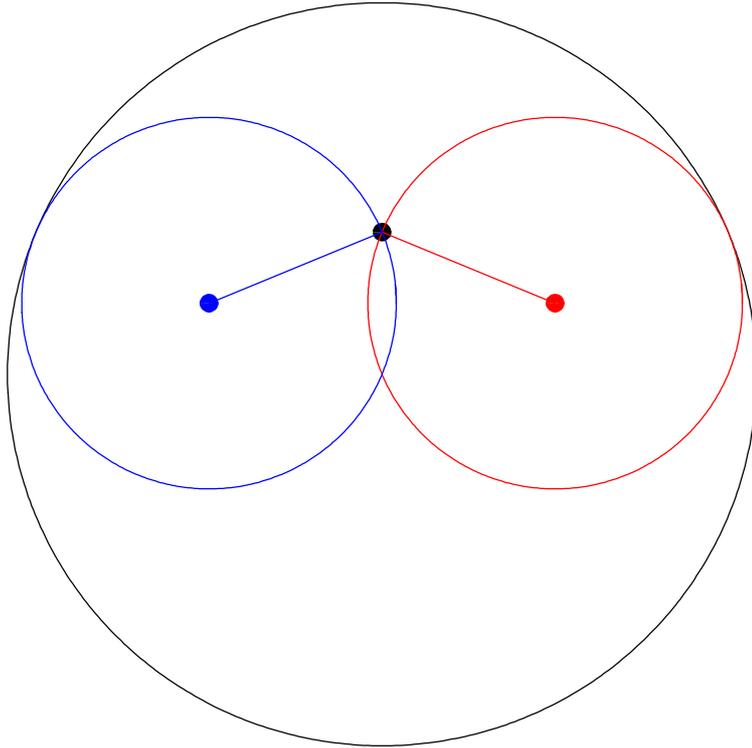
```
Drehung;
```

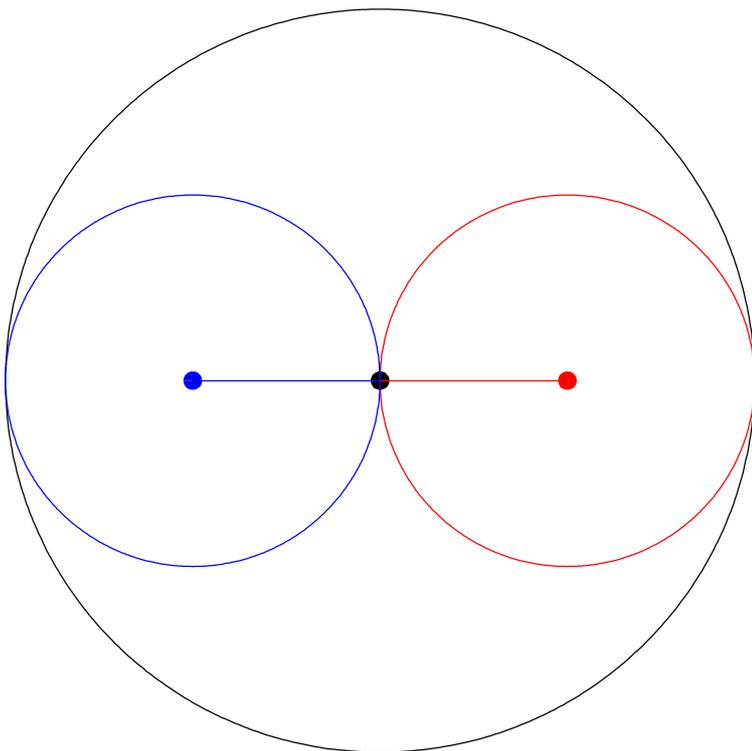
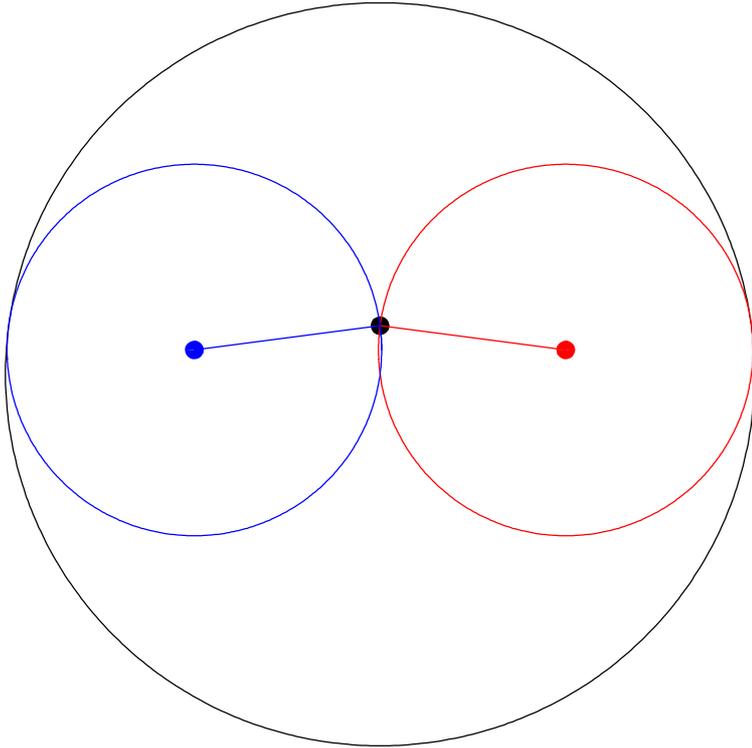


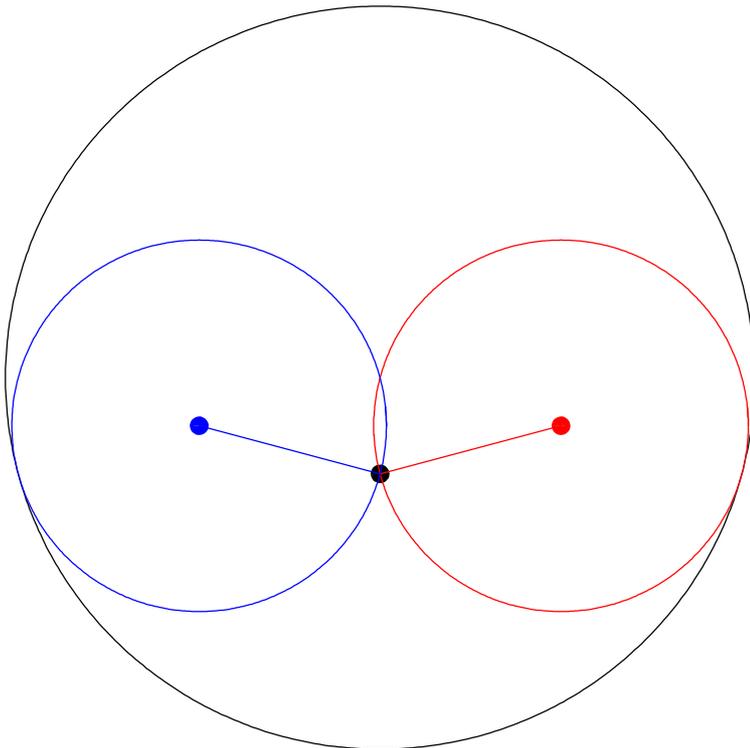
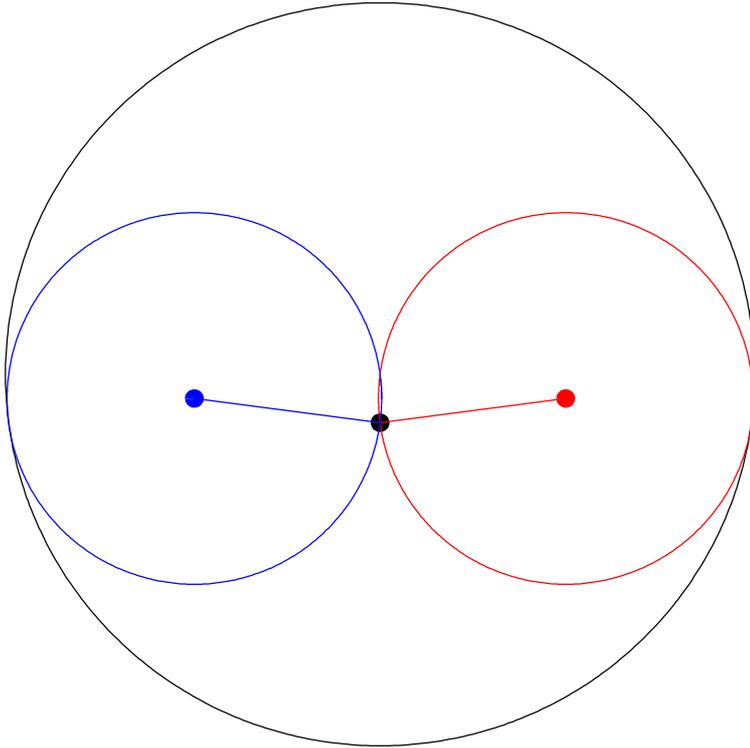


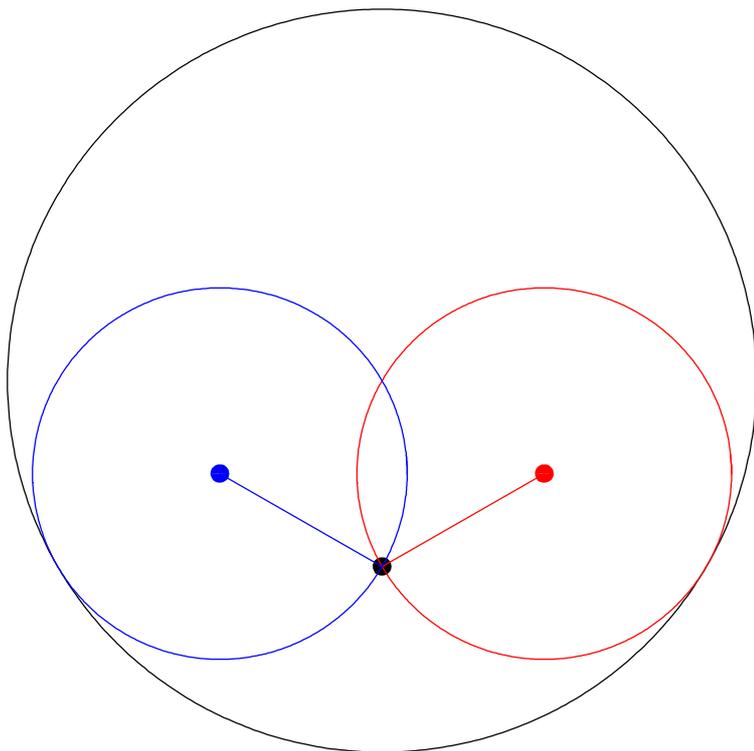
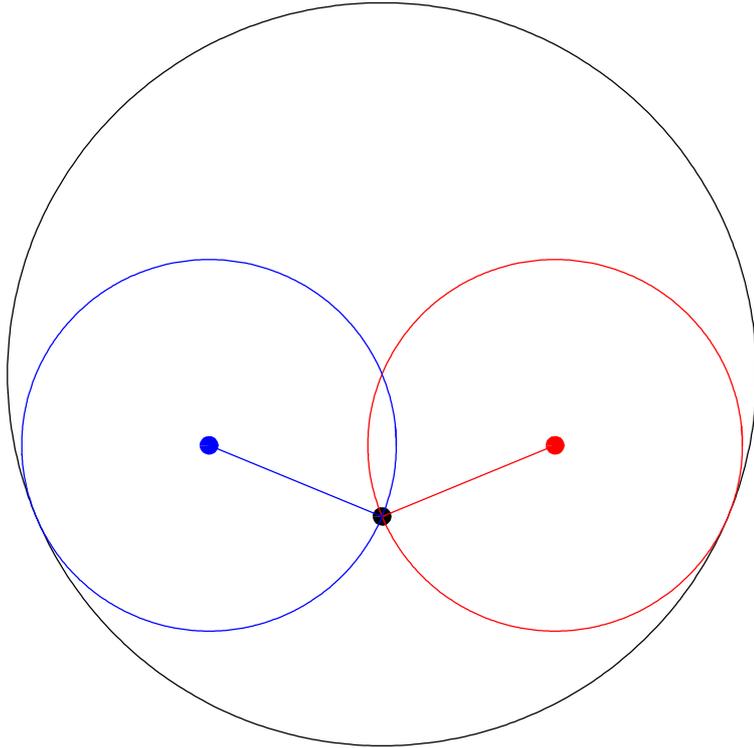


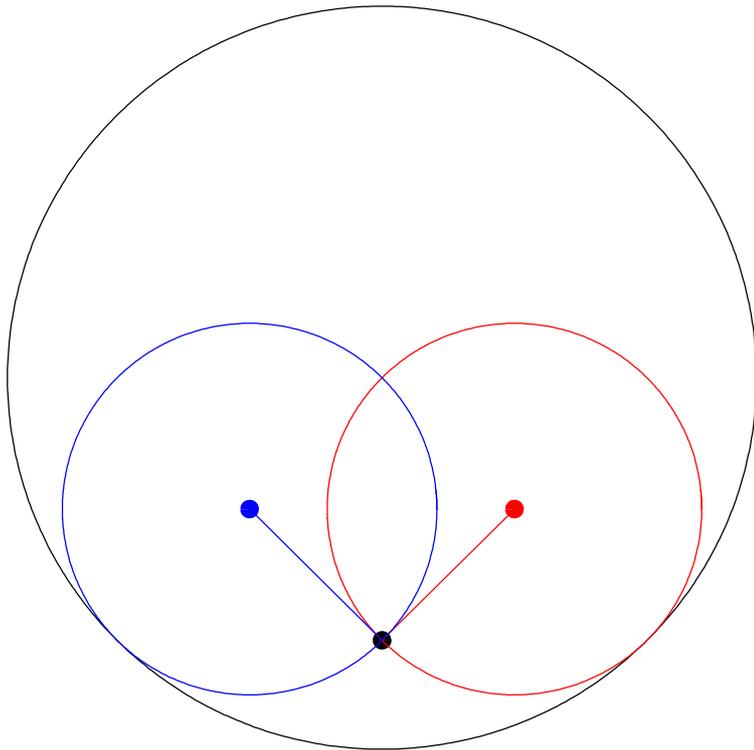
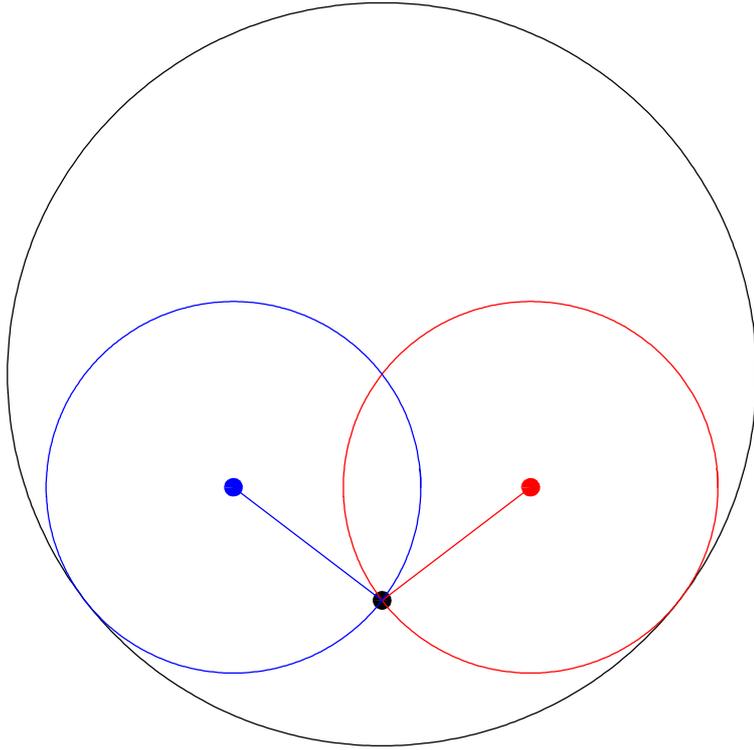


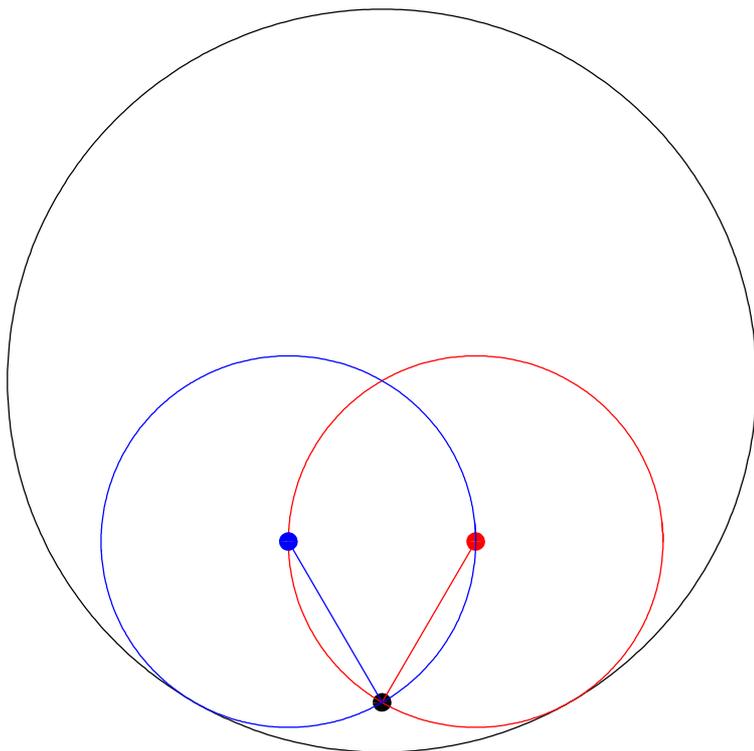
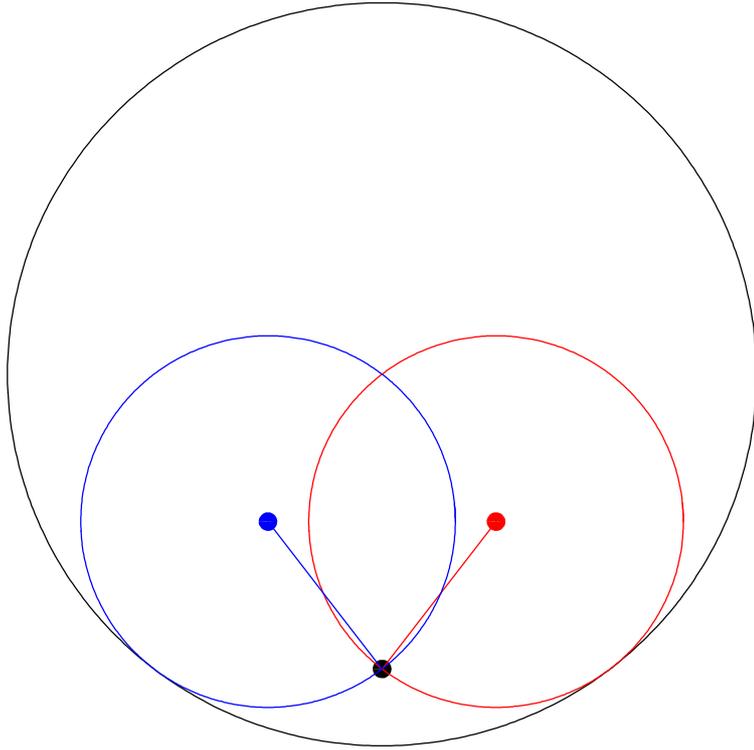


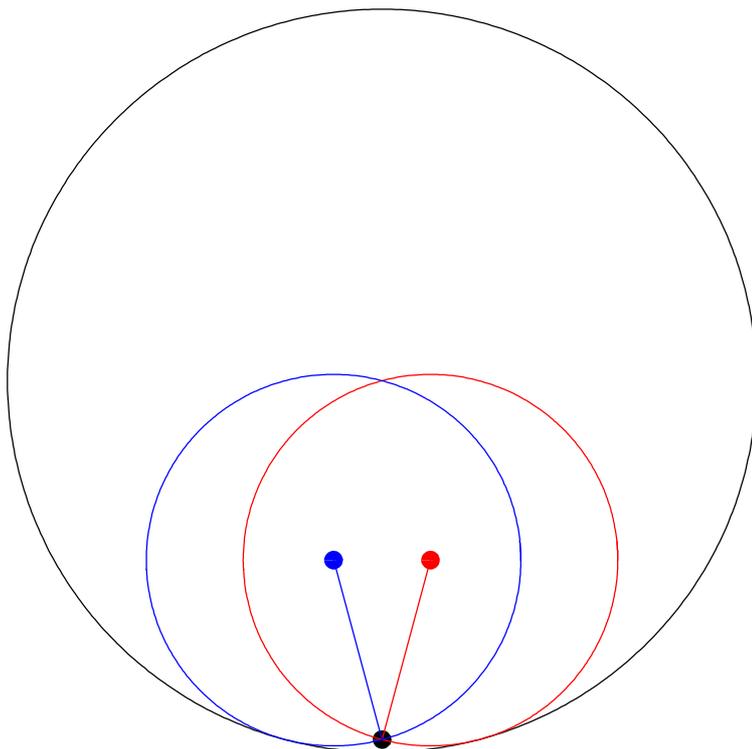
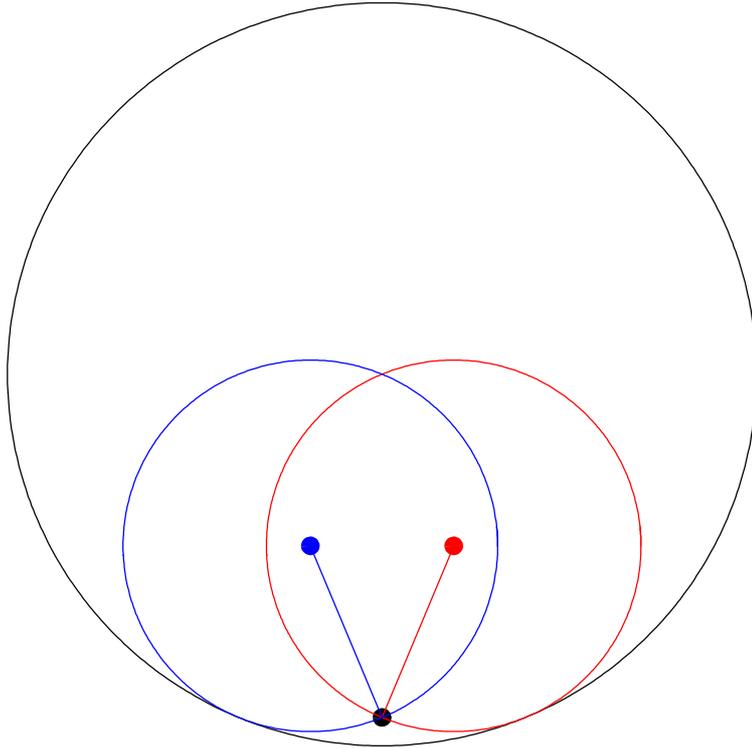


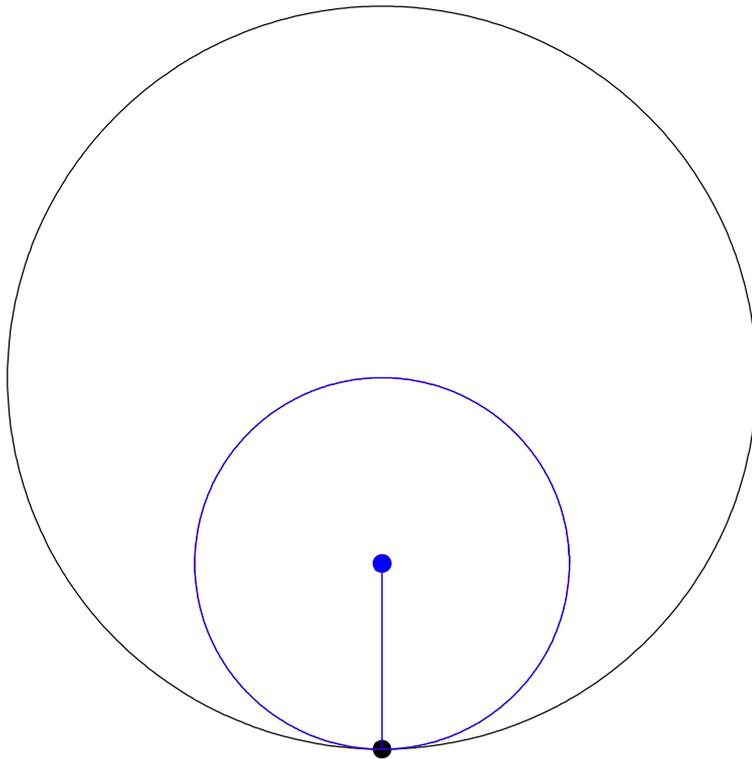
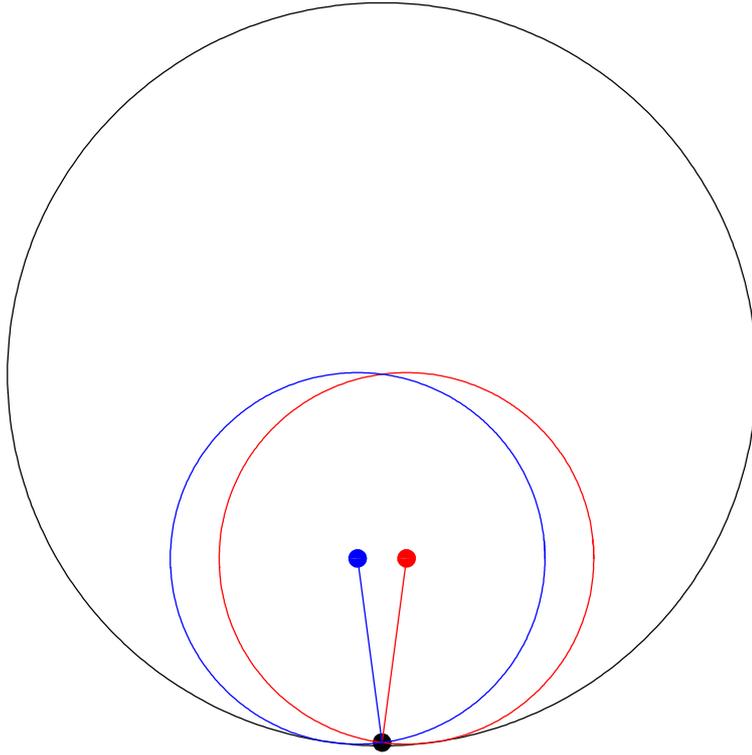


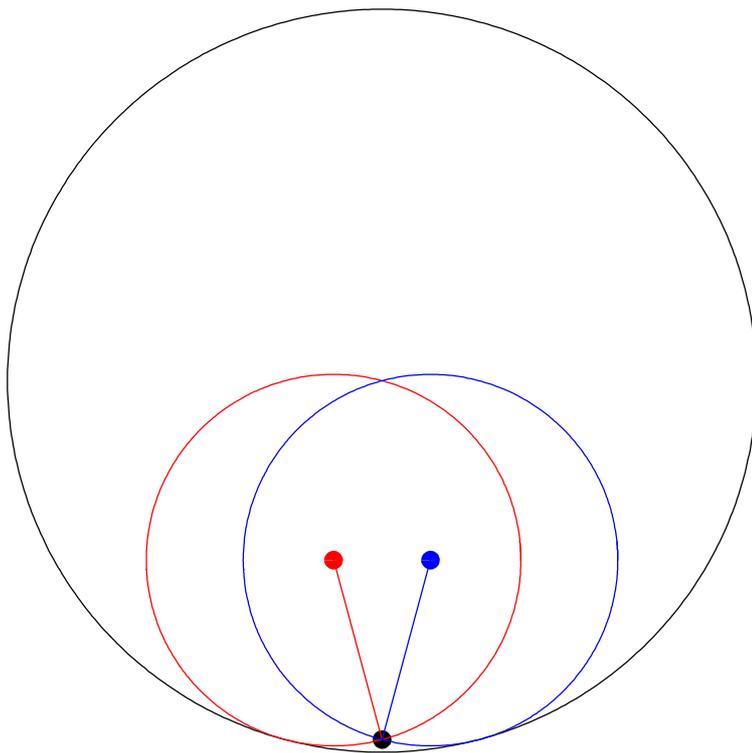
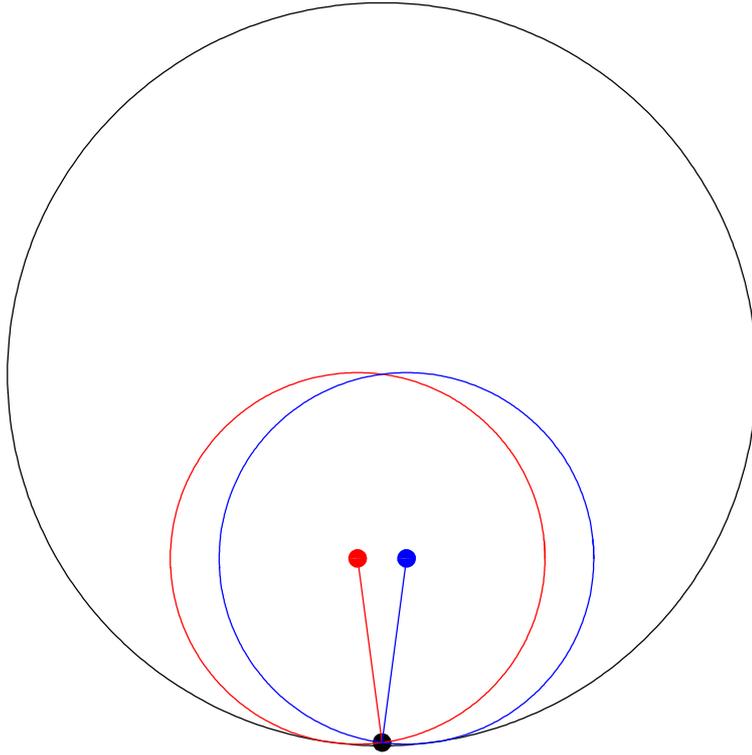


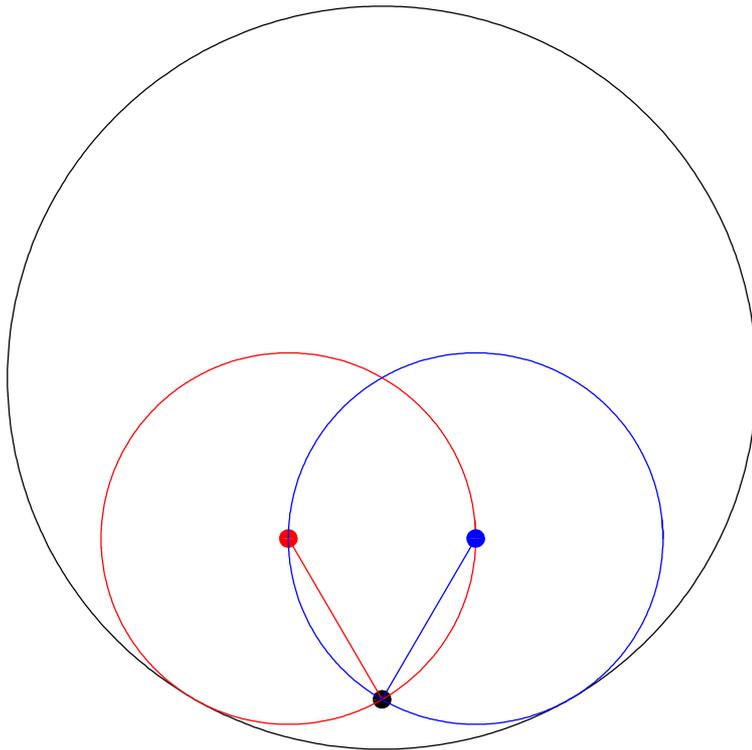
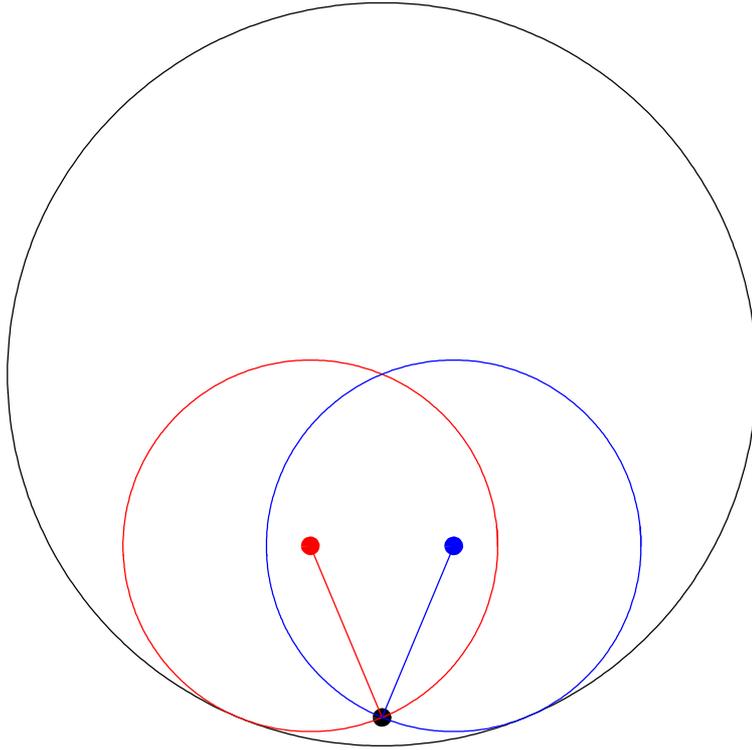


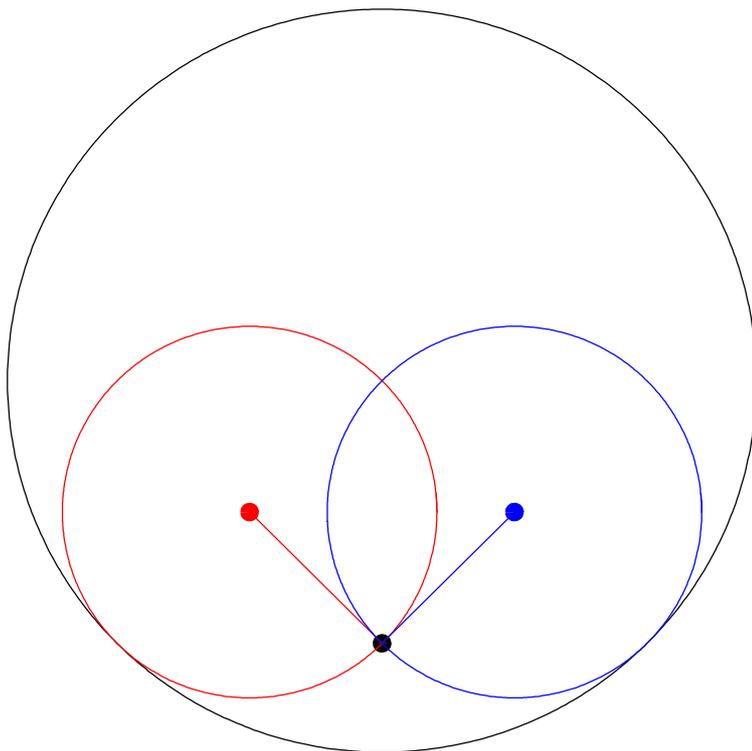
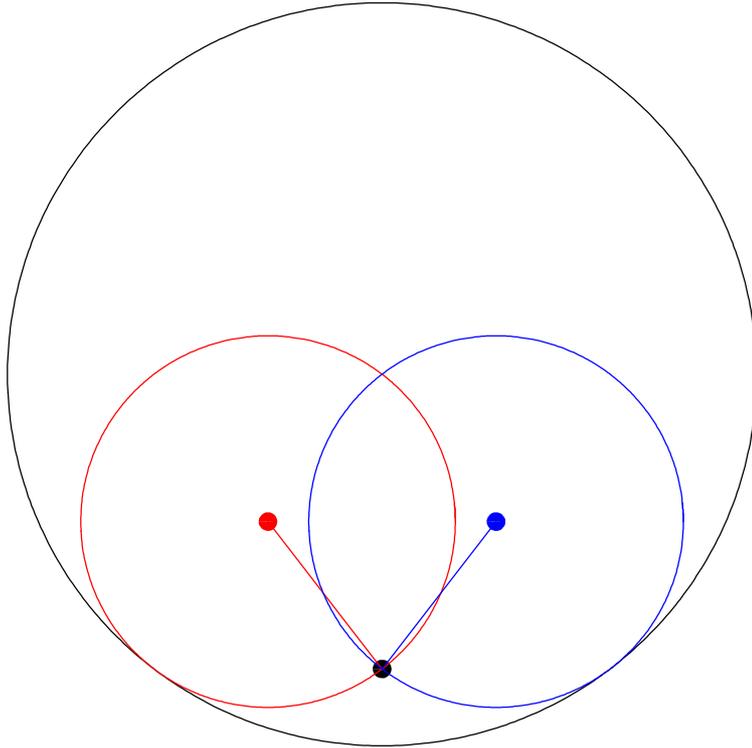


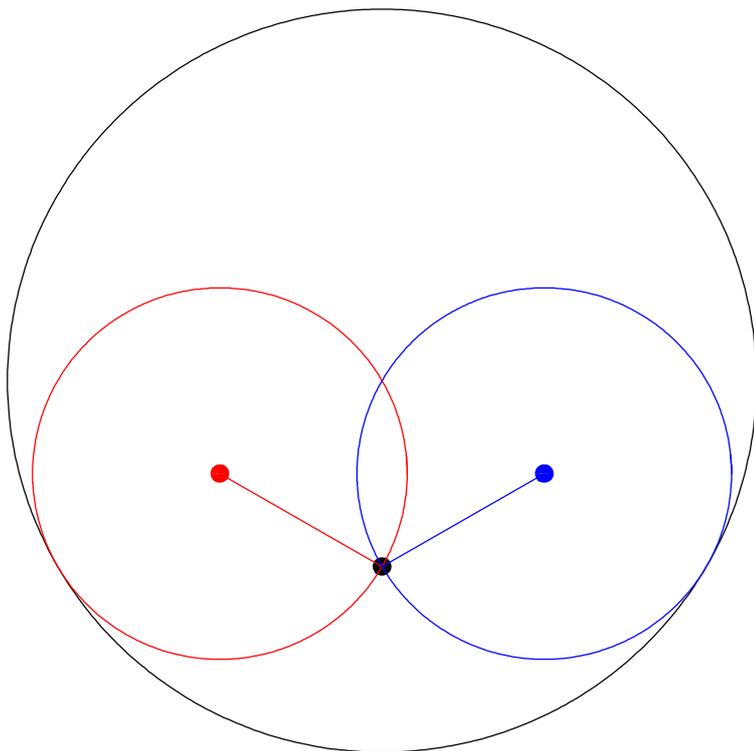
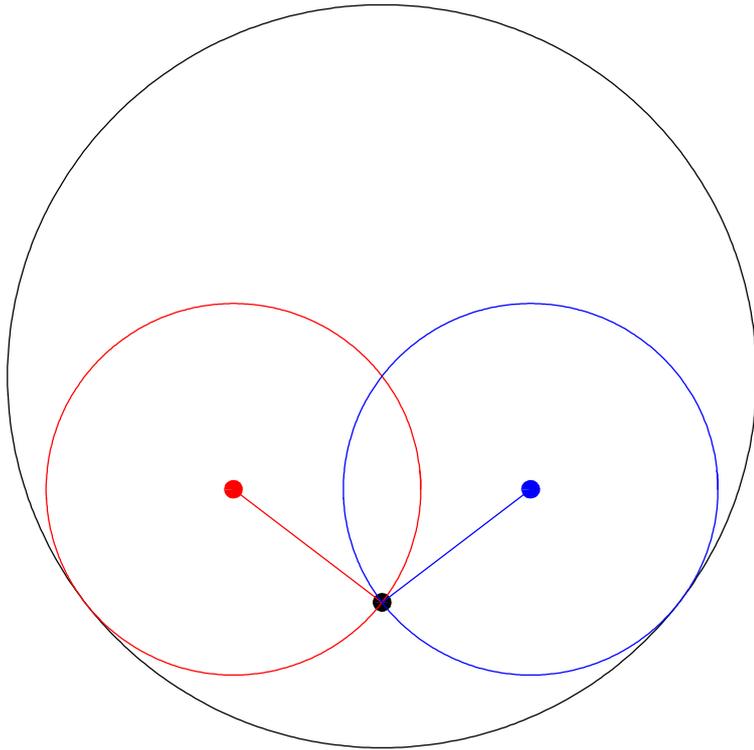


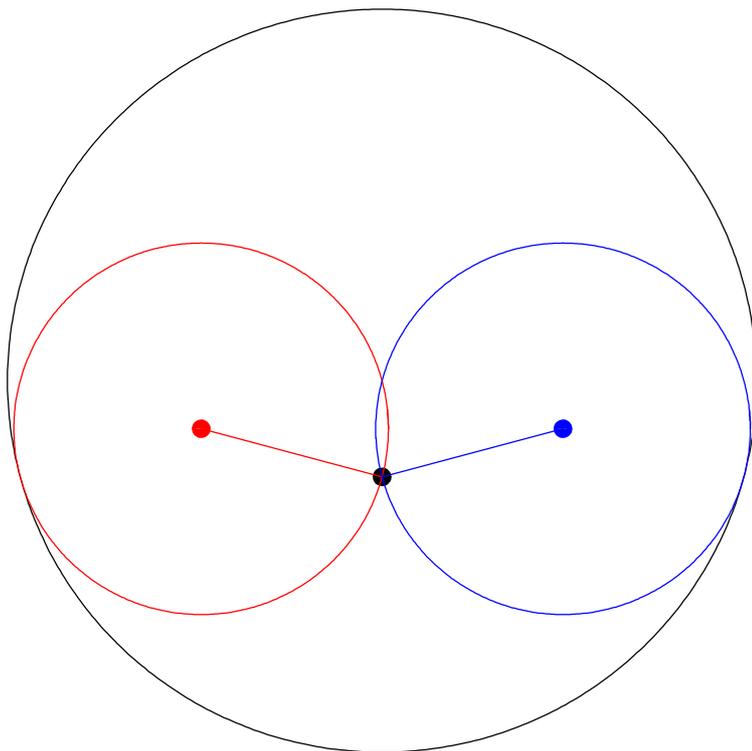
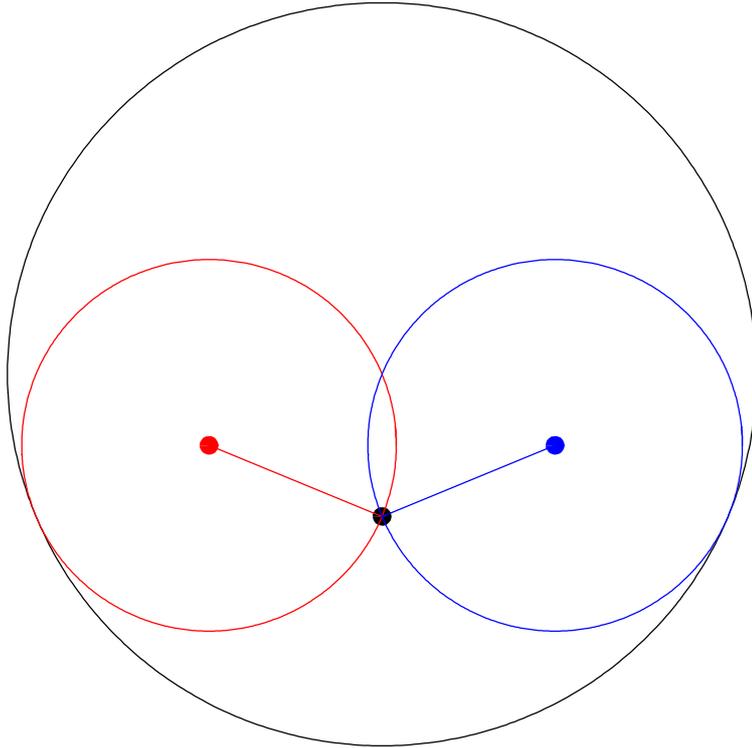


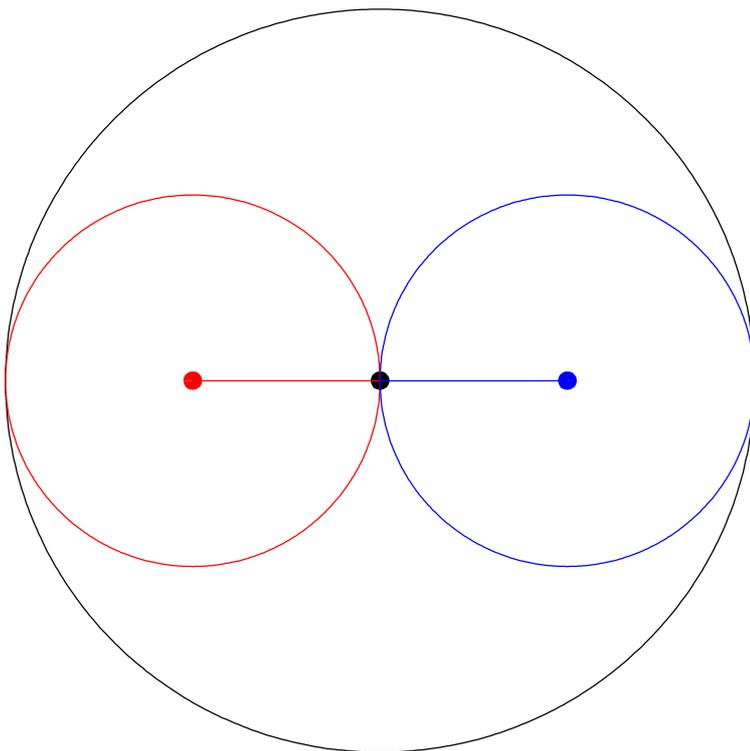
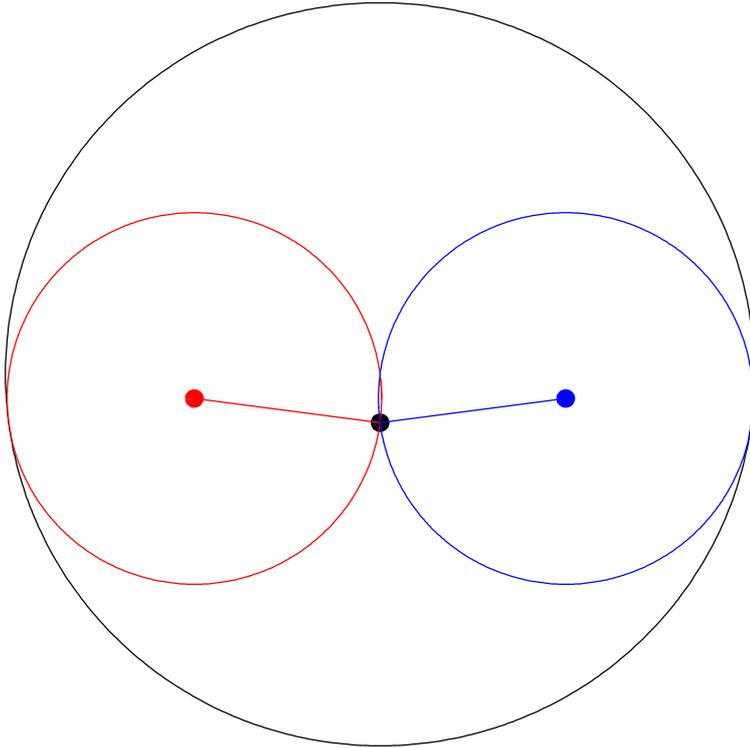


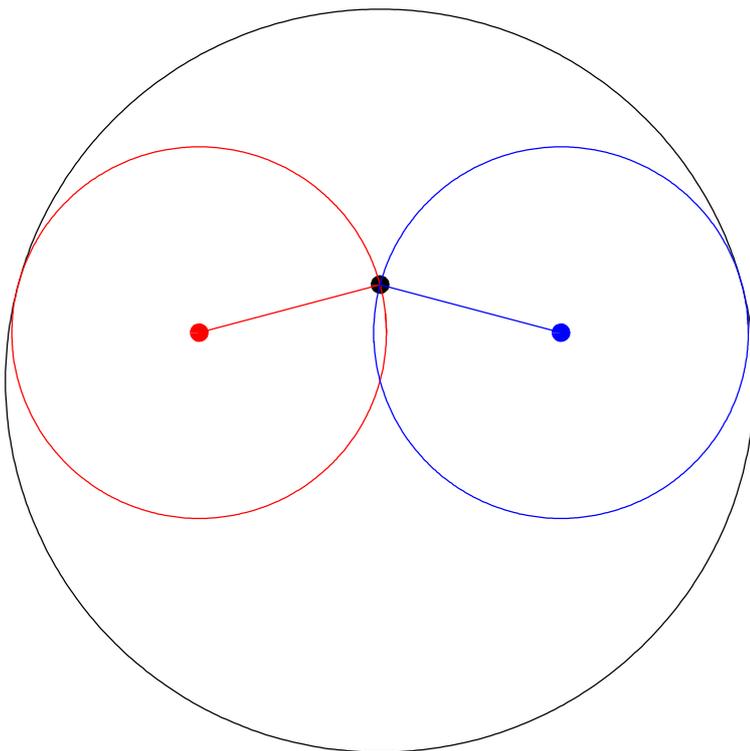
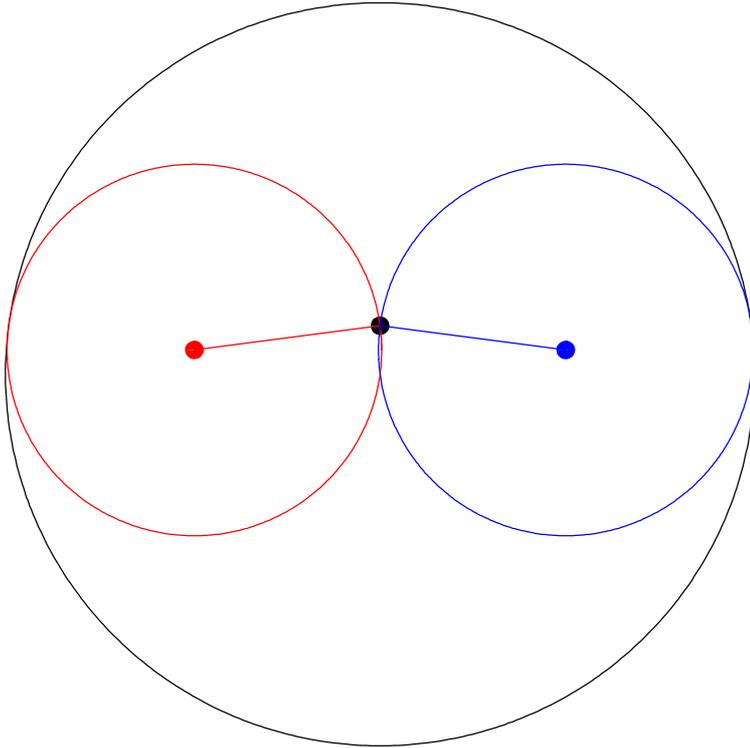


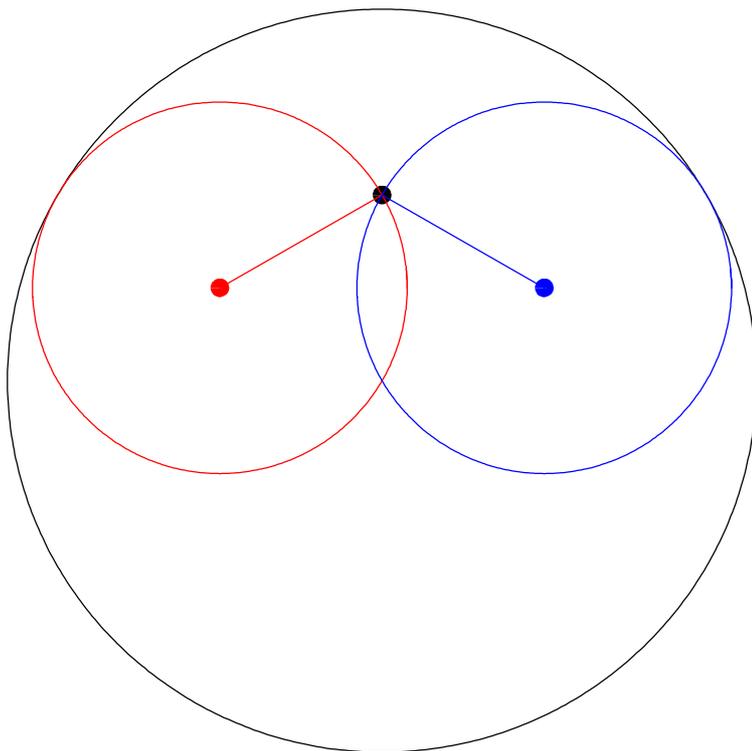
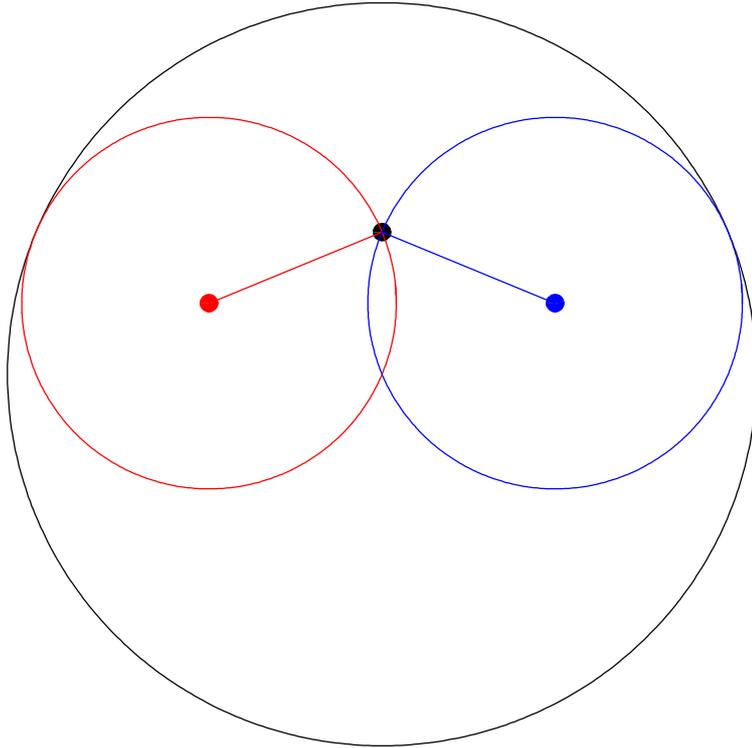


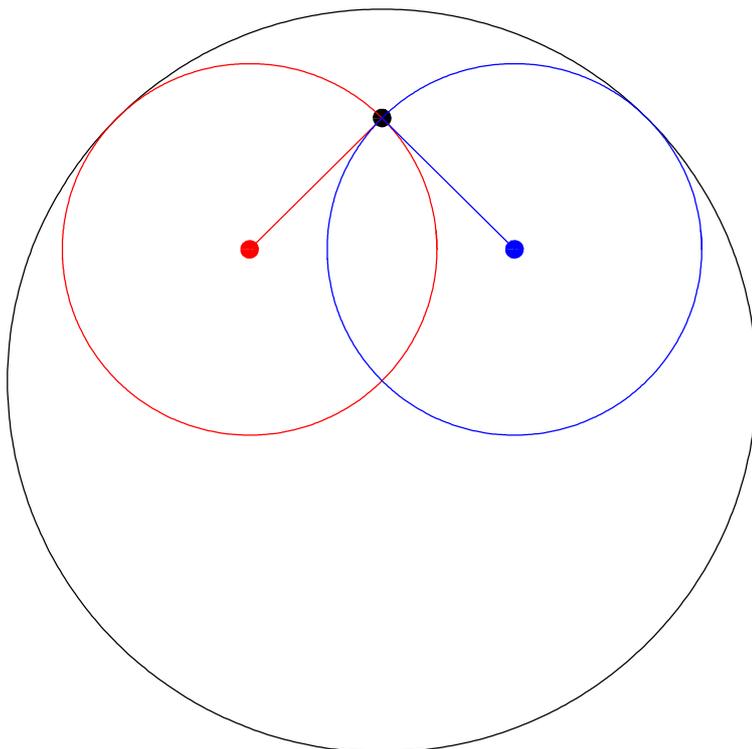
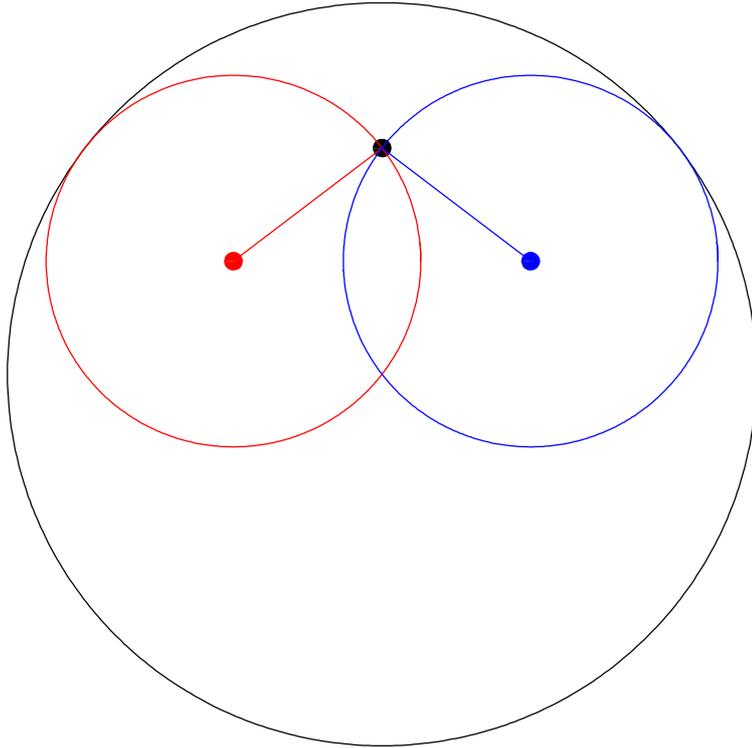


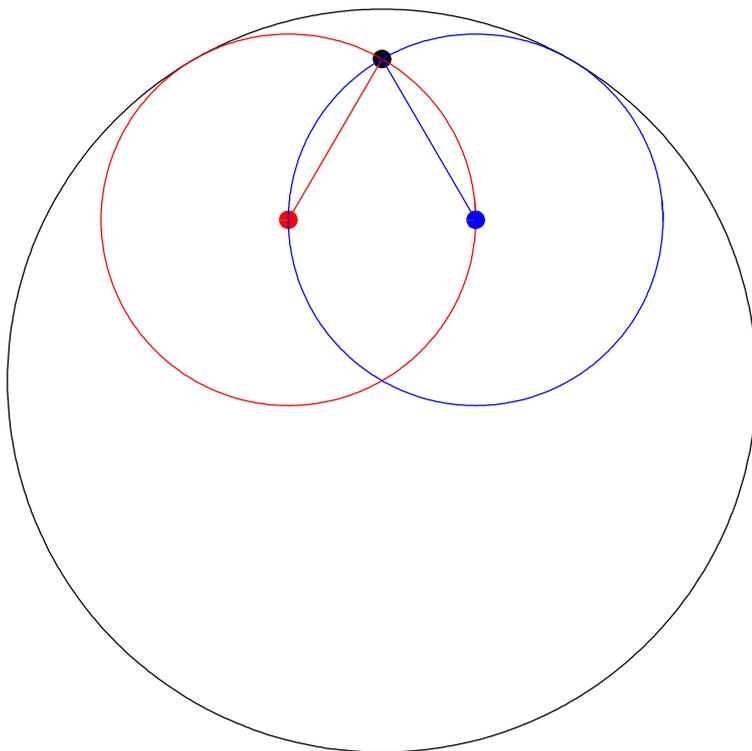
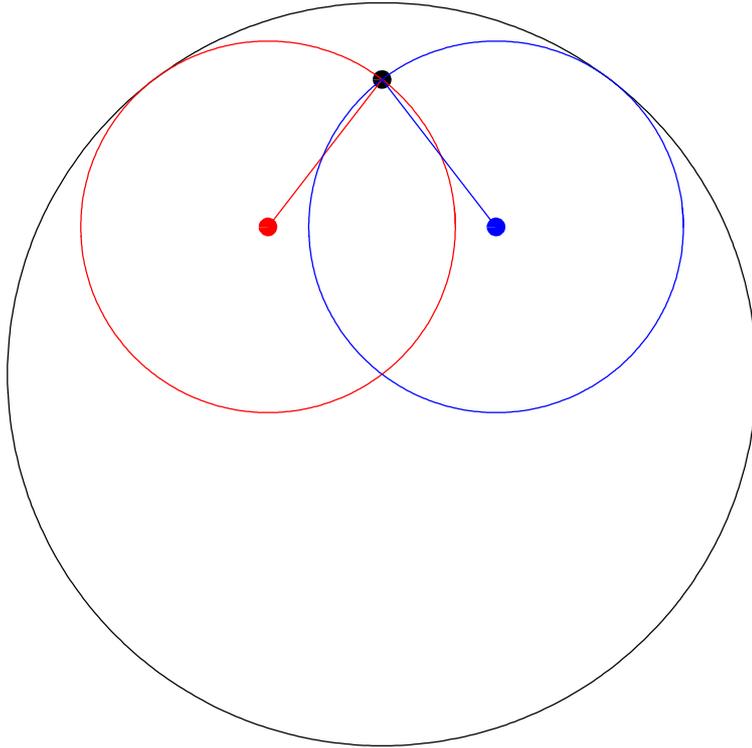


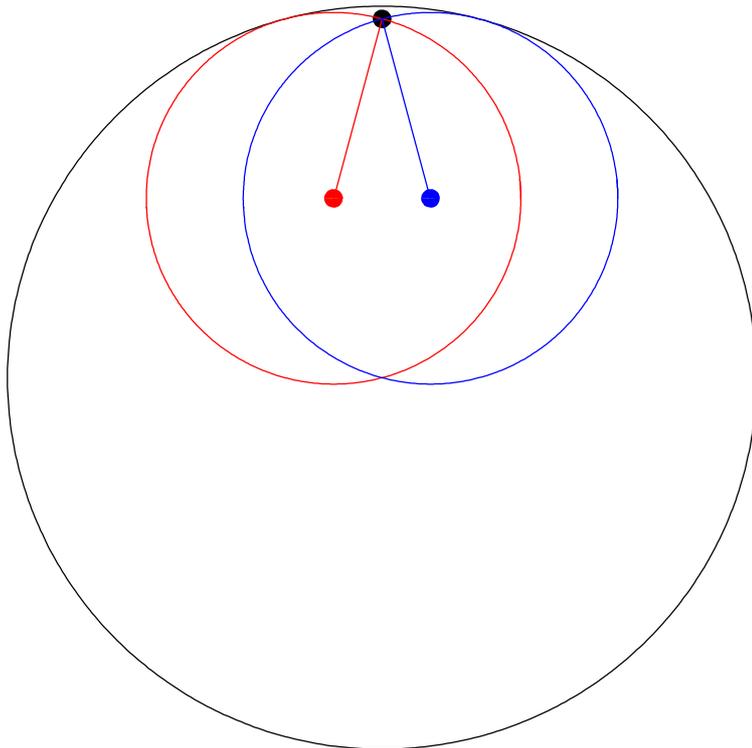
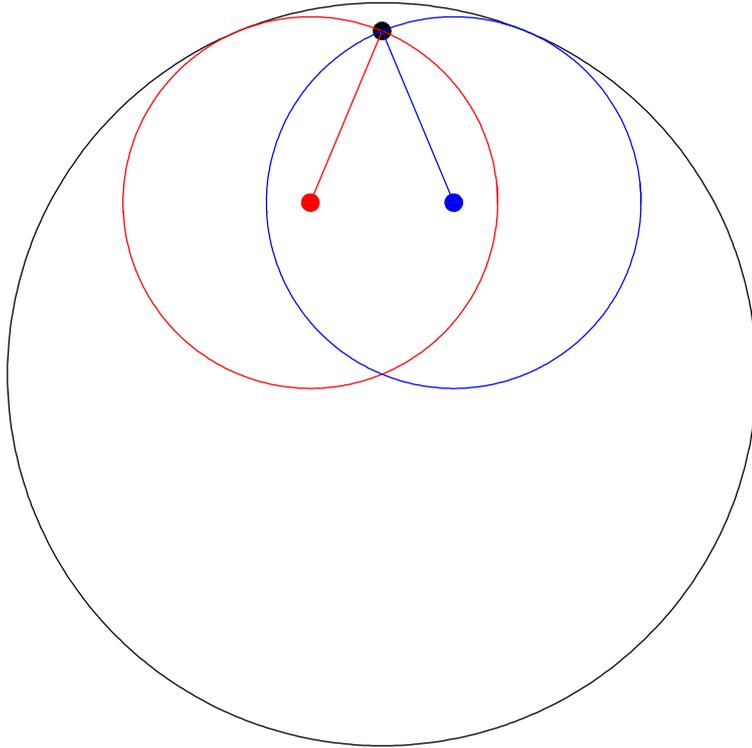


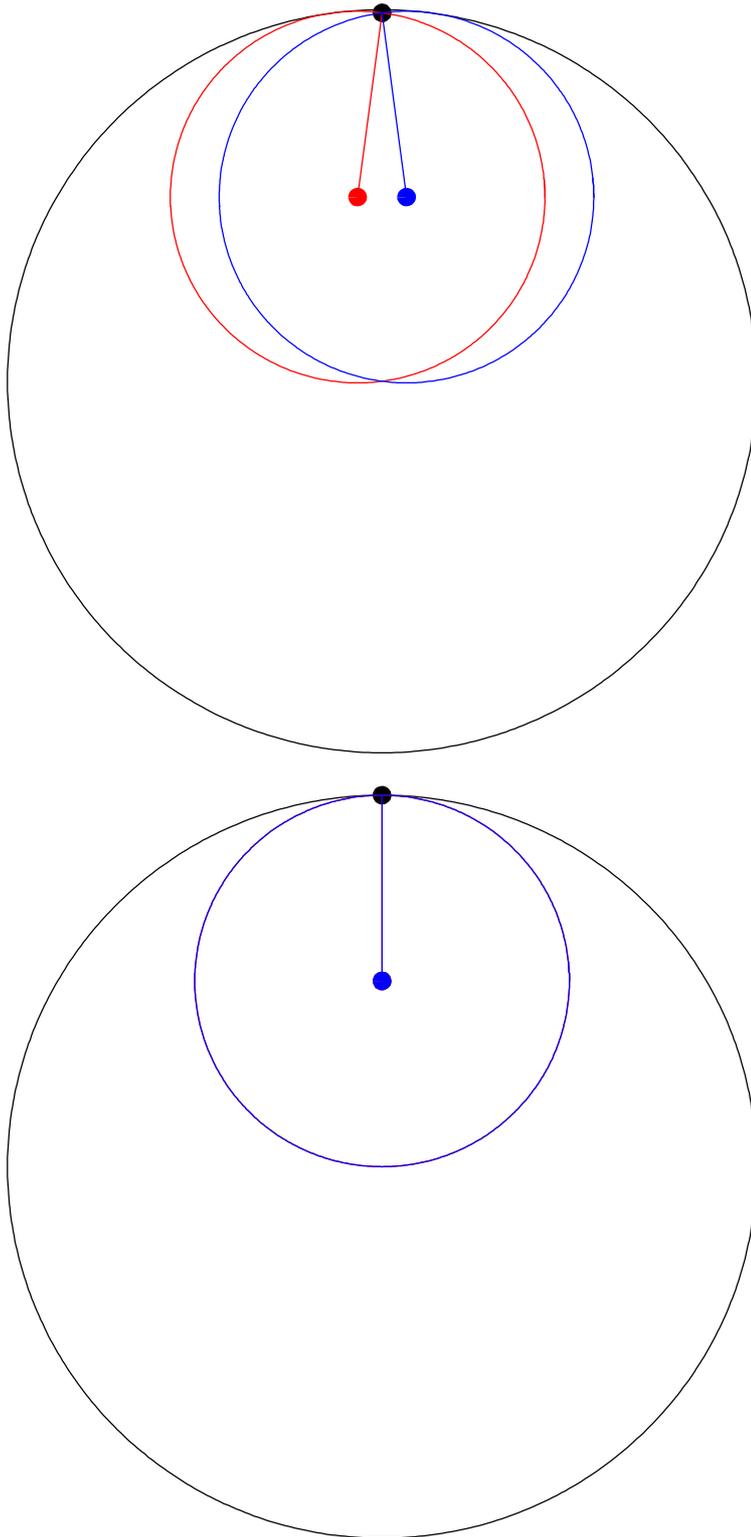












Die geraden Linien geben die Richtung der wirkenden Kraft an, mit der die harmonische Schwingung in zwei gegenläufige Drehbewegungen überführt wird.

Zum Start dieser Animation klicken Sie bitte mit der Maus rechts vom Bild in diejenige Klammer, die mit einer dreieckigen Fahne markiert ist. Anschließend drücken Sie bitte [Strg]–[Y], und die Animation startet – auch auf dem *MathReader*! Die Geschwindigkeit und Laufrichtung dieser Animation lässt sich durch das dann unten links eingeblendete Menü regeln.

### ■ 9.2.3. Entwicklungs-Geschichte

#### ■ 9.2.3.1. Arbeitsgemeinschaft Metallguss, Aalen

2002 arbeitete ich bei der Arbeitsgemeinschaft Metallguss (Aalen), die zum Steinbeis Technologie-Transferzentrum gehört. Es schien der Zeitpunkt gekommen, um den Kurbelwellen-freien Motor einzelnen Firmen zur Weiterentwicklung zu überlassen.

#### ■ 9.2.3.2. Firma Frech, Schorndorf

Obwohl die Konstruktion bereits bei Rothe im Klartext angedacht ist, war selbst die dort beschriebene Planetenrad-Anwendung noch immer unbekannt. Die Firma Frech (Schorndorf) war im Jahre 2002 dankbar für den Hinweis auf die Konstruktion, da auf diese Weise der Stoß eines Druckkolbens (für eine Druckgussmaschine) definierter erzeugt werden kann als über eine Hydraulik.

#### ■ 9.2.3.3. Firma Eurocopter, Donauwörth

Thomas Batz von der Arbeitsgemeinschaft Metallguss meinte bei Betrachtung der Konstruktionszeichnung: "Darf ich das an Eurocopter weitergeben?" Mir war vor allem eine nicht-militärische Anwendung wichtig, und so empfahl ich den Hubschrauber für die Himalaja-Bergwacht. Der Höhenrekord der Hubschrauber-Bergwacht betrug damals noch ca. **6500 m** ü.NN. Den konkreten Forschungsplan dazu diktierte ich etwas später (im Stegreif) am 10. Juni 2002 an Bundesbildungsministerin Bulmahn durchs Telefon:

Motor bauen, Leistung bestimmen, Zündzeitpunkt optimieren, Einbau in einen bewährten Himalaja-Hubschrauber und Steigerung des Höhenrekords um ca. **1000 m**. Danach noch mindestens ein weiteres Jahr Neu-Entwicklung eines Everest-Hubschraubers: Motor aufs Dach, SETRA-Konstruktion (selbsttragende Konstruktion, Markenprodukt bei Kässbohrer, Ulm), Startgewicht: mindestens **1000 kg**, französischer Testpilot, Höhenrekord und Steiggeschwindigkeit in **9000 m** Höhe prüfen, dann Gipfelbesuch, Bereitschaft zur Bergrettung während der Testphase. Nach Abschluss der Tests Vorstellung des Hubschraubers auf einer Pressekonferenz in Paris, Interview mit Hans Kammerlander zum Thema.

Dieses Programm wurde im Mai 2005 erfolgreich abgeschlossen. Es ist nicht selbstverständlich, dass ein solches Unternehmen auf Anhieb gelingt!

Diese Historie zeigt außerdem, wie wichtig es ist, möglichst immer Klartext zu reden, denn ich habe freilich erwartet, dass noch Rückfragen an mich gestellt werden, was bislang nicht geschah.

Was noch aussteht, sind die Aufräumarbeiten am Everest, den Hans Kammerlander als "die höchstgelegene Müllkippe der Welt" bezeichnet (vgl. [Kam1999], Bild Seite 286). Hinzu kommt, dass vergleichsweise viele Leichen am Berg auf den Abtransport warten.

## ■ 9.2.4. Betriebswirtschaftliche Überlegungen

### ■ 9.2.4.1. Wann Patent anmelden?

Ein Patent sollte angemeldet werden, wenn gerade das Geld dazu da ist oder die Serienproduktion unmittelbar bevor steht. Ansonsten lebt eine Firma auch von Betriebsgeheimnissen.

### ■ 9.2.4.2. Innovation per Gesetz?

Bundesbildungsministerin Bulmahn war bereits 2002 so begeistert von dem Südländ-Motor, dass sie eine EU-Norm für sämtliche Fahrzeugmotoren in Europa auf den Weg bringen wollte, damit nur noch dieser Motorentyp gebaut werden dürfe, da er voraussichtlich weniger Kraftstoff verbraucht als ein Kurbelwellen-Motor.

In der Geschichte der DDR gab es genügend "Neuerungen", die von der Regierung vorgeschrieben waren, was zu einer "Kommando-Wirtschaft" (so hat das mein Opa bezeichnet) geführt hat: Einmal gab es nur Luftpumpen, ein anderes Mal nur Fahrradreifen zu kaufen. Ein Großteil der Arbeitszeit wurde mit Warten auf Ware und entsprechendem Schlange stehen beim Einkauf verbracht.

Es ist die große Verantwortung eines Erfinders, neue Produkte langsam und ohne gesetzliche Unterstützung auf den Weg zu bringen: Dadurch verliert der Erfinder zwar Lizenzgebühren, sorgt aber dafür, dass die übrige Industrie nicht völlig lahm gelegt wird. Oft genug ist das alte Produkt auch nicht völlig unbrauchbar.

### ■ 9.2.4.3. Anderes Beispiel für langsame Innovation

Gegenwärtig drängt die Digital-Kamera die herkömmliche Photographie zurück. Trotzdem wird weder das alte noch das neue System verboten.

## ■ 9.3. Protokoll

Die Version von *Mathematica* lautet:

```
{$Version, $ReleaseNumber, $LicenseID}
```

```
{Microsoft Windows 3.0 (October 6, 1996), 0, 0}
```

Die Berechnungszeit betrug (in Sekunden):

```
TimeUsed[]
```

```
5.01
```

## Literatur

[HMS2004]

Hering E., Martin R., Stohrer M. *Physik für Ingenieure*, Springer-Verlag Berlin etc., 9. Auflage, (2004)

[Kam1999]

Kammerlander H. *Bergsüchtig*, Piper München Zürich, (1999)

[Rot1954]

Rothe R. *Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker, Ingenieure*, Band I: B.G.Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig, 14. Auflage (1954)

[Stö1998]

Stöcker H., *Taschenbuch der Physik*, Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main, 3. überarbeitete und erweiterte Auflage, (1998)