# 1. Muster-Klausur-00

*Letzte Berechnung: 7.12.2004 Dr. Norbert Südland*

## ■ 1.1. Große und kleine Einheiten (3 Punkte)

Bei Ingenieuren ist es üblich, Maßzahlen in Tausender-Blöcken anzugeben und dann den zugehörigen Vorsatz (M für Mega, p für piko usw.) vor der Grundeinheit zu verwenden. Rechnen Sie folgende Größen in diese "Engineering"-Form um:

**a.)** Die Ruhemasse des Deuterons beträgt $\mathbf{3.3435860 * 10^{-27}\ kg}$.

**b.)** Die spezifische Protonenladung $\frac{e}{m}$ beträgt $\mathbf{9.5788309 * 10^{7}\ \frac{C}{kg}}$.

**c.)** Die Compton-Wellenlänge des Protons beträgt $\mathbf{1.32141002 * 10^{-15}}\ \boldsymbol{m}$.

### ■ 1.1.1. Teilaufgabe a.)

$\mathbf{3.3435860 * 10^{-27}}$ **"kg" /. {"kg" → 1000 "g"} // EngineeringForm**

$(3.34359 \times 10^{-24})$ g

$\mathbf{10^{-24}}$ ***g*** sind Yoctogramm, also **yg**.

(1 Punkt)

### ■ 1.1.2. Teilaufgabe b.)

$$\mathbf{9.5788309 * 10^{7}\ \frac{"C"}{"kg"}}\ \text{// EngineeringForm}$$

$$\frac{(95.7883 \times 10^{6})\ \mathrm{C}}{\mathrm{kg}}$$

$\mathbf{10^{6}}$ ***C*** sind MegaCoulomb, also **MC**.

(1 Punkt)

### ■ 1.1.3. Teilaufgabe c.)

**$1.32141002 * 10^{-15}$ "m" // EngineeringForm**

$(1.32141 \times 10^{-15})$ m

$\mathbf{10^{-15}}$ ***m*** sind Femtometer, also **fm**.

(1 Punkt)

## ■ 1.2. Reibung (5 Punkte)

**a.)** Welche Arten von Reibung sind Ihnen bekannt?
**b.)** Welche Reibung davon erzeugt die größte Kraft?
**c.)** Was bewirkt die Reibung in bezug auf die Dynamik?

### ■ 1.2.1. Teilaufgabe a.)

Haftreibung, Gleitreibung, Rollreibung (3 Punkte)

### ■ 1.2.2. Teilaufgabe b.)

Haftreibung (1 Punkt)

### ■ 1.2.3. Teilaufgabe c.)

Sie bremst immer ab. (1 Punkt)

## ■ 1.3. Romanischer Bogen (5 Punkte)

**a.)** Wie lautet die Brückenformel und was bedeuten die einzelnen Teilterme?

**b.)** Welche optimale Lastverteilung $\rho_l[x]$ resultiert für einen romanischen Bogen der Art $y[x] == \sqrt{R^2 - x^2}$ im Bereich $-R \le x \le R$?

**c.)** Wie ändert sich die Horizontalkraft $\boldsymbol{H}$ in Abhängigkeit von $\boldsymbol{x}$?

## ■ 1.3.1. Teilaufgabe a.)

$$\rho_l[x]\, g == H \frac{\partial^2 y[x]}{\partial x^2} \tag{1.1}$$

(1 Punkt)

| | | |
|---|---|---|
| mit: | $\rho_l[x]$ | Längendichte der Lastverteilung |
| | $g$ | Fallbeschleunigung |
| | $H$ | Horizontalkraft |
| | $y[x]$ | Bogenform |
| | $x$ | Ortskoordinate |

(1 Punkt)

## ■ 1.3.2. Teilaufgabe b.)

Zweimal differenzieren nach $x$ (Je Differentiationsordnung 1 Punkt):

$$\partial_x\left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)$$

$$\partial_x \%$$

**% // Simplify**

$$-\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$-\frac{x^2}{(R^2 - x^2)^{3/2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$-\frac{R^2}{(R^2 - x^2)^{3/2}}$$

## ■ 1.3.3. Teilaufgabe c.)

Die Horizontalkraft $H$ ist unabhängig von $x$. (1 Punkt)

# ■ 1.4. Weisshorn (5 Punkte)

Der Ortsfaktor der Fallbeschleunigung $g$ soll für den Gipfel des Weisshorns (4505.5 m ü.NN.) im Wallis (geographische Breite: **46°6'10''Nord**) errechnet werden. Der zugehörige Erdradius beträgt $R == 6367.2096\,\text{km}$, die Winkelgeschwindigkeit $\omega$ der Erde läßt sich aus der Dauer eines siderischen Tages bestimmen ($T_{\text{siderisch}} == 86164.0905\,s$), die Gravitationskonstante beträgt $\gamma == 6.67259 * 10^{-11}\,N\,\frac{m^2}{\text{kg}^2}$, die Erdmasse $M == 5.977 * 10^{24}\,\text{kg}$ soll im Erdmittelpunkt vereinigt angenommen werden (eingeschränkte Superposition).

## ■ 1.4.1. Bekannte Grössen

$$\text{bekannt[4]} = \left\{R \to 6367.2096\,\text{"km"} + 4505.5\,\text{"m"},\ \varphi \to \frac{\pi}{180\,\text{"°"}}\left(46 + \frac{6}{60} + \frac{10}{3600}\right)\text{"°"},\right.$$
$$\left. T \to 86164.0905\,\text{"s"},\ \gamma \to 6.67259 * 10^{-11}\,\frac{\text{"N"}\,\text{"m"}^2}{\text{"kg"}^2},\ M \to 5.977 * 10^{24}\,\text{"kg"}\right\}$$

$$\left\{R \to 6367.2096\,\text{km} + 4505.5\,\text{m},\ \varphi \to \frac{16597\,\pi}{64800},\right.$$
$$\left. T \to 86164.0905\,\text{s},\ \gamma \to \frac{6.67259 \times 10^{-11}\,\text{m}^2\,\text{N}}{\text{kg}^2},\ M \to 5.977 \times 10^{24}\,\text{kg}\right\}$$

## ■ 1.4.2. Gravitationskraft

Nach Newton:

$$m\,a_G == -\gamma\,\frac{M\,m}{R^2}$$

**Gravitationsbeschleunigung = Solve[%, $a_G$] // Flatten**

$$\%\ /.\ \text{bekannt[4]}\ /.\ \left\{\text{"N"} \to \frac{\text{"kg"}\,\text{"m"}}{\text{"s"}^2},\ \text{"km"} \to 1000\,\text{"m"}\right\}$$

$$m\,a_G == -\frac{m\,M\,\gamma}{R^2}$$

$$\left\{a_G \to -\frac{M\,\gamma}{R^2}\right\}$$

$$\left\{a_G \to -\frac{9.82347\,\text{m}}{\text{s}^2}\right\}$$

(2 Punkte)

## ■ 1.4.3. Zentrifugalkraft

$$\boldsymbol{m\, a_Z == m\, R\, \mathrm{Cos}[\varphi]\, \omega^2 \;/.\; \left\{\omega \to \frac{2\,\pi}{T}\right\}}$$

**Zentrifugalbeschleunigung = Solve[%, $a_Z$] // Flatten**

**% /. bekannt[4] /. {"km" → 1000 "m"}**

$$m\, a_Z == \frac{4\, m\, \pi^2\, R\, \mathrm{Cos}[\varphi]}{T^2}$$

$$\left\{a_Z \to \frac{4\, \pi^2\, R\, \mathrm{Cos}[\varphi]}{T^2}\right\}$$

$$\left\{a_Z \to \frac{0.0234924\, \mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right\}$$

(2 Punkte)

## ■ 1.4.4. Vektorielle Addition

Vektorsumme:

**MatrixForm[{$a_Z$, 0, 0}] + MatrixForm[{$a_G$ Cos[$\varphi$], 0, $a_G$ Sin[$\varphi$]}] /.**
**Zentrifugalbeschleunigung /. Gravitationsbeschleunigung**

**Ortsfaktor = % /. {MatrixForm → Identity} // MatrixForm // Simplify**

$$\begin{pmatrix} \frac{4\pi^2 R\, \mathrm{Cos}[\varphi]}{T^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{M\,\gamma\, \mathrm{Cos}[\varphi]}{R^2} \\ 0 \\ -\frac{M\,\gamma\, \mathrm{Sin}[\varphi]}{R^2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{4\pi^2 R}{T^2} - \frac{M\,\gamma}{R^2}\right) \mathrm{Cos}[\varphi] \\ 0 \\ -\frac{M\,\gamma\, \mathrm{Sin}[\varphi]}{R^2} \end{pmatrix}$$

Betrag des Vektors:

$$\boldsymbol{\mathrm{Ortsfaktorwert} = \sqrt{\mathrm{Plus}\; @@\; (\#^2\; \&\; /@\; (\mathrm{Ortsfaktor}\; /.\; \{\mathrm{MatrixForm} \to \mathrm{Identity}\}))}}$$

$$\boldsymbol{\%\; /.\; \mathrm{bekannt}[4]\; /.\; \left\{\text{"km"} \to 1000\, \text{"m"},\; \text{"N"} \to \frac{\text{"kg"}\,\text{"m"}}{\text{"s"}^2}\right\}\; //\; \mathrm{PowerExpand}}$$

$$\sqrt{\left(\frac{4\,\pi^2\,R}{T^2} - \frac{M\,\gamma}{R^2}\right)^2 \mathrm{Cos}[\varphi]^2 + \frac{M^2\,\gamma^2\,\mathrm{Sin}[\varphi]^2}{R^4}}$$

$$\frac{9.8072\,\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Dieser Wert ist gerundet also noch **9.81** $\frac{m}{s^2}$.

(1 Punkt)

## ■ 1.5. Bremsweg (5 Punkte)

Ein Auto (**$m$ == 500 kg**) erfährt ohne ABS auf der Ebene eine Vollbremsung auf einer ölverschmierten Straße. Der zugehörige Gleitreibungskoeffizient beträgt **$\mu_G$ == 0.2**. Bestimmen Sie den Bremsweg nach dem Energiesatz für eine Geschwindigkeit von

**a.)** **$v_1$ == 30 km / $h$**,

**b.)** **$v_2$ == 50 km / $h$**.

**c.)** Wie wirkt sich eine größere Masse ***m*** auf den Bremsweg aus?

### ■ 1.5.1. Bekannte Größen

$$\textbf{bekannt[5]} = \left\{m \to 500\,\text{"kg"},\ \mu_G \to 0.2,\ v_1 \to 30\,\frac{\text{"km"}}{\text{"h"}},\ v_2 \to 50\,\frac{\text{"km"}}{\text{"h"}},\ g \to \frac{981}{100}\,\frac{\text{"m"}}{\text{"s"}^2}\right\} /.\ \{\text{"km"} \to 1000\,\text{"m"},\ \text{"h"} \to 3600\,\text{"s"}\}$$

$$\left\{m \to 500\,\text{kg},\ \mu_G \to 0.2,\ v_1 \to \frac{25\,\text{m}}{3\,\text{s}},\ v_2 \to \frac{125\,\text{m}}{9\,\text{s}},\ g \to \frac{981\,\text{m}}{100\,\text{s}^2}\right\}$$

(1 Punkt bei Umrechnung in $\frac{m}{s}$)

### ■ 1.5.2. Gesuchte Größe

Bremsweg **$s$ == ?**

### ■ 1.5.3. Formeln

Energiebilanz:

$$\textbf{Ergebnis[5]} = \textbf{Solve}\left[\frac{m\,v_k^2}{2} == m\,g\,\mu_G\,s,\ s\right] \,//\, \textbf{Flatten}$$

$$\left\{s \to \frac{v_k^2}{2\,g\,\mu_G}\right\}$$

(2 Punkte)

### 1.5.4. Teilaufgabe a.)

**Ergebnis[5] /. {$k \to 1$} /. bekannt[5]**

$\{s \to 17.6974\,\text{m}\}$

(1/2 Punkt)

### 1.5.5. Teilaufgabe b.)

**Ergebnis[5] /. {$k \to 2$} /. bekannt[5]**

$\{s \to 49.1593\,\text{m}\}$

(1/2 Punkt)

### 1.5.6. Teilaufgabe c.)

Antwort: "Gar nicht" (1 Punkt)

## 1.6. Stossparameter (5 Punkte)

Eine Stahlkugel fällt frei aus der Höhe $\boldsymbol{h} == \mathbf{80\,cm}$ auf eine Stahlplatte und springt rotationsfrei insgesamt $\boldsymbol{T} == \mathbf{5}\,\boldsymbol{s}$ auf und ab, bis sie zur Ruhe kommt.

**a.)** Wie gross ist der Stossparameter $\boldsymbol{\epsilon}$?

**b.)** Auf welchen Anteil der vorigen Höhe springt die Kugel jeweils zurück?

**c.)** Wie gross ist die Geschwindigkeit unmittelbar nach dem ersten Aufprall?

**d.)** Welche Energie wird bis zum Stillstand verbraucht?

### 1.6.1. Vorbereitung

$$\textbf{bekannt[6]} = \left\{h \to 80\,\text{"cm"},\ T \to 5\,\text{"s"},\ g \to \frac{981}{100}\,\frac{\text{"m"}}{\text{"s"}^2}\right\}$$

$$\left\{h \to 80\,\text{cm},\ T \to 5\,\text{s},\ g \to \frac{981\,\text{m}}{100\,\text{s}^2}\right\}$$

## ■ 1.6.2. Teilaufgabe a.)

Formel laut Vorlesungs-Manuskript:

$$\textbf{Formel}[6, a] = \epsilon == \frac{T - t_0}{T + t_0}$$

$$\epsilon == \frac{T - t_0}{T + t_0}$$

(1/2 Punkt)

$t_0$ für freien Fall:

$$\textbf{Fallzeit}[6, t_0] = \textbf{Solve}\left[h == \frac{g\, t_0^2}{2}, t_0\right] \text{// Last}$$

$$\left\{t_0 \to \frac{\sqrt{2}\,\sqrt{h}}{\sqrt{g}}\right\}$$

(1 Punkt)

**Ergebnis[6, *a*] = Solve[Formel[6, *a*], ϵ] /. Fallzeit[6, $t_0$] // Flatten**

$$\% \text{ /. bekannt[6] /. } \left\{\text{"cm"} \to \frac{\text{"m"}}{100}\right\} \text{ // PowerExpand}$$

**% // *N***

$$\left\{\epsilon \to -\frac{\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{h}}{\sqrt{g}} - T}{\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{h}}{\sqrt{g}} + T}\right\}$$

$$\left\{\epsilon \to -\frac{-5\,\mathrm{s} + \frac{4}{3}\sqrt{\frac{10}{109}}\,\mathrm{s}}{5\,\mathrm{s} + \frac{4}{3}\sqrt{\frac{10}{109}}\,\mathrm{s}}\right\}$$

$$\{\epsilon \to 0.850531\}$$

(1/2 Punkt)

## ■ 1.6.3. Teilaufgabe b.)

Höhenanteil $f == \epsilon^2$

$$\epsilon^2 \;/.\; \text{Ergebnis}[6, a] \;/.\; \text{bekannt}[6] \;/.\; \left\{\text{"cm"} \to \frac{\text{"m"}}{100}\right\} \;//\; \text{PowerExpand}$$

$$\% \;//\; N$$

$$\frac{\left(-5\,\text{s} + \frac{4}{3}\sqrt{\frac{10}{109}}\,\text{s}\right)^2}{\left(5\,\text{s} + \frac{4}{3}\sqrt{\frac{10}{109}}\,\text{s}\right)^2}$$

0.723403

(1 Punkt)

### ■ 1.6.4. Teilaufgabe c.)

Stossgesetz mit $u == 0$:

$$v_1 == u + \epsilon\,(u - v_0) \;/.\; \{u \to 0\}$$

$$\% \;/.\; \text{Solve}\left[m\,g\,h == \frac{m\,v_0^2}{2},\, v_0\right] \;//\; \text{Last}$$

$$\text{Ergebnis}[6, c] = \% \;/.\; \text{Ergebnis}[6, a] \;/.\; \text{bekannt}[6] \;/.\; \left\{\text{"cm"} \to \frac{\text{"m"}}{100}\right\} \;//\; \text{PowerExpand}$$

$$\% \;//\; N$$

$$v_1 == -\epsilon\, v_0$$

$$v_1 == -\sqrt{2}\,\sqrt{g}\,\sqrt{h}\,\epsilon$$

$$v_1 == \frac{3\sqrt{\frac{218}{5}}\,\text{m}\left(-5\,\text{s} + \frac{4}{3}\sqrt{\frac{10}{109}}\,\text{s}\right)}{5\,\text{s}\left(5\,\text{s} + \frac{4}{3}\sqrt{\frac{10}{109}}\,\text{s}\right)}$$

$$v_{1.} == -\frac{3.36965\,\text{m}}{\text{s}}$$

(1 Punkt)

### ■ 1.6.5. Teilaufgabe d.)

Die gesamte Lageenergie $m\,g\,h$. (1 Punkt)

## ■ 1.7. Rotationspendel (5 Punkte)

Eine Vollkugel und ein Vollzylinder werden auf einer gekrümmten Bahn beschleunigt, so dass periodische Hin- und Herbewegungen entstehen (Rotationspendel).

**a.)** Wie gross ist jeweils die maximale Geschwindigkeit, wenn die Beschleunigung aus der Ruhe in **Δh == 20 cm** Höhe erfolgte?

**b.)** Würde eine Hohlkugel schneller oder langsamer schwingen als eine Vollkugel?

## ■ 1.7.1. Vorbereitung

$$\mathbf{bekannt[7]} = \left\{\Delta\mathrm{h} \to 20\,\text{"cm"},\ g \to \frac{981}{100}\ \frac{\text{"m"}}{\text{"s"}^2}\right\}$$

$$\left\{\Delta\mathrm{h} \to 20\,\mathrm{cm},\ g \to \frac{981\,\mathrm{m}}{100\,\mathrm{s}^2}\right\}$$

## ■ 1.7.2. Teilaufgabe a.)

Energiesatz:

$$m\,g\,\Delta\mathrm{h} == \frac{m\,v^2}{2} + \frac{J\,\omega^2}{2}\ /.\ \left\{\omega \to \frac{v}{r}\right\}$$

$$\mathbf{Ergebnis[7,}\ a\mathbf{] = Solve[\%,}\ v\mathbf{]\ //\ Last}$$

$$g\,m\,\Delta\mathrm{h} == \frac{m\,v^2}{2} + \frac{J\,v^2}{2\,r^2}$$

$$\left\{v \to \frac{\sqrt{2}\,\sqrt{g}\,\sqrt{m}\,\sqrt{\Delta\mathrm{h}}}{\sqrt{m + \frac{J}{r^2}}}\right\}$$

(2 Punkte)

Vollzylinder:

$$\mathbf{Ergebnis[7,}\ a\mathbf{]}\ /.\ \left\{J \to \frac{m\,r^2}{2}\right\}$$

$$\%\ /.\ \mathbf{bekannt[7]}\ /.\ \left\{\text{"cm"} \to \frac{\text{"m"}}{100}\right\}\ //\ \mathbf{PowerExpand}$$

$$\%\ //\ N$$

$$\left\{v \to \frac{2\,\sqrt{g}\,\sqrt{\Delta\mathrm{h}}}{\sqrt{3}}\right\}$$

$$\left\{v \to \frac{\sqrt{\frac{327}{5}}\ \mathrm{m}}{5\,\mathrm{s}}\right\}$$

$$\left\{v \to \frac{1.61741\,\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right\}$$

(1 Punkt)

Vollkugel:

$$\textbf{Ergebnis[7, } a\textbf{] /. }\left\{J \to \frac{2\, m\, r^2}{5}\right\}$$
$$\textbf{\% /. bekannt[7] /. }\left\{\text{"cm"} \to \frac{\text{"m"}}{100}\right\}\textbf{ // PowerExpand}$$
$$\textbf{\% // } N$$

$$\left\{v \to \sqrt{\frac{10}{7}}\, \sqrt{g}\, \sqrt{\Delta \text{h}}\right\}$$

$$\left\{v \to \frac{3\sqrt{\frac{109}{14}}\ \text{m}}{5\ \text{s}}\right\}$$

$$\left\{v \to \frac{1.67417\,\text{m}}{\text{s}}\right\}$$

(1 Punkt)

## ■ 1.7.3. Teilaufgabe b.)

Die Hohlkugel wäre langsamer als die Vollkugel, da sie bei gleicher Masse mehr Rotationsenergie aufnehmen kann.

(1 Punkt)

Beispiel hierzu mit $R == \frac{r}{2}$:

$$\textbf{Ergebnis[7, } a\textbf{] /. }\left\{J \to \frac{2\, m}{5}\, \frac{r^5 - R^5}{r^3 - R^3}\right\}\textbf{ /. }\left\{R \to \frac{r}{2}\right\}$$
$$\textbf{\% /. bekannt[7] /. }\left\{\text{"cm"} \to \frac{\text{"m"}}{100}\right\}\textbf{ // PowerExpand}$$
$$\textbf{\% // } N$$

$$\left\{v \to 2\sqrt{\frac{35}{101}}\, \sqrt{g}\, \sqrt{\Delta \text{h}}\right\}$$

$$\left\{v \to \frac{3\sqrt{\frac{763}{101}}\ \text{m}}{5\ \text{s}}\right\}$$

$$\left\{v \to \frac{1.64912\,\text{m}}{\text{s}}\right\}$$

Also langsamer als die Vollkugel.

## ■ 1.8. Protokoll

Die Version von *Mathematica* lautet:

**{$Version, $ReleaseNumber, $LicenseID}**

{Microsoft Windows 3.0 (October 6, 1996), 0, 0}

Die Berechnungszeit betrug (in Sekunden):

**TimeUsed[]**

2.19